序

本书是作者十年前编写的讲义在多年教学的基础上经修改补充而成的。

由国内学者编著的实变函数论教材已有许多版本，但是对于特定的教学环境和要求来讲，有的本子显得单薄了一些，有的内容又太多了一些，因此无暇对解题的方法和技巧给予更多的注意。于是作者产生了这样的想法，能否在保留实变函数基本理论的必要深度和一般性的前提下，采用尽可能简洁的叙述方式，以便腾出时间来加强解题方法和技巧的训练。正因为这样，本书取名为《实变函数理论和方法》，并且对一些基本方法作了较为透彻的分析，其目的还是为了加深对实变函数思想和方法的理解。

全书分为四章。第一章“集合”，特别强调了由一个集合序列构造一个单调列和不相交集列的方法，以及用集合和集合序列来表示函数和函数列的性质。第二章“测度”，特别强调构造辅助集类的方法。考虑到勒贝格—斯蒂阶积分的广泛应用，我们以勒贝格—斯蒂阶积分作为主要的具体测度，而把勒贝格测度作为其特例。第三章“积分”，特别强调单调列的方法以及简单函数的作用。第四章“微分”，用维他利定理来证明单调函数几乎处处有有限导数。

每节的习题一般分为两类。A类服务于加深对正文的理解，B类用来训练解题方法和技巧。每节的定义、定理、命题、性质、注、例、图均统一编号，以便于查找。例如在文中提到定理Ⅲ.2.9.1)表示第三章第二节定理9.1)。引用同章(节)的定理时，省略章(节)号，例如定理2.9表示同一章的第二节定理9。

前三章最后一节是简短的历史注记，介绍了有关理论的历史发

展和有关数学家的贡献。这样做的目的是让读者看到现在看来如此完美精深的理论是经过许多数学家一代接一代的艰苦工作发展而成的。有些工作一开始还受到怀疑、批评、甚至反对，经过相当长的一段时间后才被广泛接受。从而使读者认识到数学理论的建立是一个不断发明创造的过程，它需要热爱数学，愿意为数学献身的人们用艰苦的、坚持不懈的、创造性的劳动才能不断发展完善。

书末附有参考书目，作为学有余力或对某些问题有兴趣的读者进一步扩大视野或深入钻研时的一个向导。

限于作者水平，编写又很匆忙，书中一定有不少缺点和错误，恳请专家和读者指正。

编著者

1998 年 10 月

目　录

引　言

函数论研究的重点是积分理论。

在数学分析中我们讨论了黎曼(Riemann)积分。设 f 是定义在闭区间$[a,b]$上的函数，任给$[a,b]$的一个分划

$$D: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

令 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，记 $\lambda(D)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$，称为分划 D 的模。任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，定义积分和

$$S_D=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i。$$

如果存在有限数 I 使得

$$\lim_{\lambda(D)\to 0}S_D=I,$$

则称 f 在$[a,b]$上黎曼可积，I 称为 f 在$[a,b]$上的黎曼积分，记为

$$I=\int_c^b f(x)\mathrm{d}x。$$

由定义可知，f 在$[a,b]$上黎曼可积的充要条件是

$$\lim_{\lambda(D)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0, \tag{1}$$

其中 ω_i 是 f 在$[x_{i-1},x_i]$上的振幅。黎曼积分理论并没有给出(1)式成立的充要条件，只给出了一些充分条件。例如当 f 是$[a,b]$上的连续函数、分段连续函数时 f 是黎曼可积的。从这些条件看黎曼积分只适用于“比较连续”的函数。但是数学中存在大量非连续函数，例如区间$[0,1]$上的狄里希莱(Dirichlet)函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\text{ 是}[0,1]\text{中的有理数},\\ 0 & x\text{ 是}[0,1]\text{中的无理数},\end{cases}$$

就不是黎曼可积的。因此有必要建立一种比黎曼积分更广泛的积分理论。

从几何上来看，狄里希莱函数 f 的黎曼积分值应该是区间[0,1]中有理点集的“长度”。因此，可以这样讲，f 之所以不是黎曼可积的，原因就在于黎曼积分所赖以建立的区间长度理论不能“度量”像[0,1]中有理点集这样的不规则点集的“长度”。所以要建立新的积分理论，首先就要解决不规则点集的“长度”问题，也就必须首先对点集进行一番研究。基于此，本书按照集合——测度——积分——微分这条主线来展开。

第一章　集　合

现代数学把数学的研究对象视为一些抽象的集合，在这些集合上可以建立各种结构，引进各种关系。例如代数结构、拓扑结构、测度结构、序关系、等价关系等等。树立集合的观点，学会使用集合论的语言和技巧，对于学习现代数学的各个分支都是大有裨益的。对于本教程而言，本章还有更具体、更直接的目的，就是为第二章测度作准备。

第一节　集以及集的运算

具有某种特定性质的具体或抽象的对象的全体称为集合，简称为集。其中的对象称为该集的元素。需要特别强调的是一个集合的各个元素必须是互不相同的，这一点对于后面要讲到的集合的运算特别重要。

通常我们用大写字母 A、B、E、F、X、Y、…表示集，用小写字母 $a,b,e,f,x,y,\cdots$ 表示元素。用 $x\in E$ 表示 x 是 E 的元素，读作 x 属于 E；用 $x\overline{\in} E$ 表示 x 不是 E 的元素，读作 x 不属于 E。特别，用 $\boldsymbol{N}$ ($\boldsymbol{Z}$、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{C}$)表示全体自然数(整数、有理数、实数、复数)的集合。

如何定义一个集合？一般有两种方法。一是列举法。例如 $E=\{1,2,3,4\}$ 表示集合 E 由自然数 1、2、3、4 组成，$F=\{2,4,6,8,\cdots\}$ 表示集合 F 由所有偶数组成。只含一个元素的集称为单点集，一般记为 $\{x\}$。二是描述法。当集 E 是具有某种性质 P 的元素全体时，E 可以表示为

$$E=\{x:x\text{ 具有性质 }P\}。$$

例如 $E=\{x:\sin x=0\}$ 表示 E 是方程 $\sin x=0$ 的根的全体，即 $k\pi:k=0,\pm1,\cdots$。$F=\{x:x\text{ 是某个整系数多项式的实根}\}$，也即 F 是代数数

的全体。

集 E 的部分元素组成的集 F 称为 E 的子集，记为 $F\subset E$，或者 $E\supset F$，读作 F 含在 E 内，或 E 包含 F。如果同时有 $E\subset F$ 和 $F\subset E$，那么称 E 与 F 相等，记为 $E=F$。如果 $F\subsetneqq E$，那么称 F 为 E 的真子集。不含任何元素的集称为空集，记为 $\varnothing$。注意 $\varnothing\neq\{0\}$，左边是空集，不含任何元素，而右边是一个单点集，含有一个元素 0。

数集是数字家们面对的最简单的集合。数是可以定义和、差、积、商等运算的，那么对集合是否也可以定义运算呢？对任意两个集合 E、F，可以定义

$E\cup F=\{x:x\in E$ 或者 $x\in F\}$，

称为 E 与 F 的并或和；

$E\cap F=\{x:x\in E$ 并且 $x\in F\}$，

称为 E 与 F 的交；

$E-F=\{x:x\in E$，并且 $x\in F\}$，

称为 E 与 F 的差；

$E\Delta F=\{x:x\in E$ 且 $x\overline{\in}F$，或者 $x\in F$ 且 $x\overline{\in}E\}$，

称为 E 与 F 的对称差；

$E\times F=\{(x,y):x\in E$，且 $y\in F\}$，

称为 E 与 F 的积集。有时也用 Π 代替符号 $\times$。

例如，设 $A=\{2,3,5\}$，$B=\{2,4,6\}$，则

$A\cup B=\{2,3,4,5,6\}(\neq\{2,2,3,4,5,6\})$，

$A\Delta B=\{3,4,5,6\}$。

如果 $E\cap F=\varnothing$，那么称 E 与 F 不相交。当所考虑的集都是某个集 X 的子集时，称 X 为基本集。这时可以定义余集

$E^c=X-E$。

命题 1 设 E、F、G 是集合，那么

1）$E=E$，$E\cap E=E$（和、交的幂等性）；

2）$E\cup\varnothing=E$（空集是加法的零元）；

$E\cap\varnothing=\varnothing$（空集是乘法的零元）；

3)$E\cup F=F\cup E, E\cap F=F\cap E$(和、交的交换律)；

4)$(E\cup F)\cup G=E\cup(F\cup G)$(和的结合律)；

$(E\cap F)\cap G=E\cap(E\cap G)$(交的结合律)；

5)$(E\cup F)\cap G=(E\cap G)\cup(F\cap G)$(和的分配律)；

$(E-F)\cap G=(E\cap G)-(F\cap G)$(差的分配律)；

6)如果 $E\subset F$，那么 $E-F=\varnothing$，并且对任何集 G 有

$E\cup G\subset F\cup G, E\cap G\subset F\cap G$；

7)$(E-F)-G=E-(F\cup G)$；

8)$E-F=E\cap F^c$；

9)$E\cup F=(E\cap F)\cup(E\Delta F)$。

证明：我们仅证 5)、7)、9)，目的是让读者了解证明集合等式的程式。

5)第一式的证明：设 x 属于左边，则 $x\in E\cup F$，且 $x\in G$。如果 $x\in E$，则 $x\in E\cap G$；如果 $x\in F$，则 $x\in F\cap G$，因此 x 属于右边。反过来，设 x 属于右边，则 $x\in E\cap G$ 或者 $x\in F\cap G$。因此 $x\in G$，且 $x\in E\cup F$，从而 x 属于左边。

5)第二式证明类似。

7)的证明：设 x 属于左边，则 $x\in E-F$，且 $x\overline{\in} G$。而 $x\in E-F$ 意味着 $x\in E$，且 $x\overline{\in} F$。因此 $x\in E$，且 $x\overline{\in} F\cup G$，从而 x 属于右边。反过来，设 $x\in E-(F\cup G)$，则 $x\in E$，$X\overline{\in} F$ 且 $x\overline{\in} G$，因此 $x\in(E-F)-G$。

9)的证明：设 $x\in$ 左边，则 $x\in E$ 或 $x\in F$。如果 $x\in E$，且 $x\in F$，则 $x\in E\cap F$；如果 $x\in E$，但是 $x\overline{\in} F$，则 $x\in E-F\subset E\Delta F$，因此 $x\in$ 右边。反之，设 x 属于右边，则 $x\in E\cap F$，或者 $x\in E\Delta F$，因为 $E\cap F\subset E\cup F$，$E\Delta F\subset E\cup F$，所以 $x\in E\cup F$。

显然和集与交集的概念可以推广到任意多个集的情形。我们称集的集合为集类或集族。通常用 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$、$\mathscr{E}$、$\mathscr{X}$、$\mathscr{Y}$，…表示。类 $\mathscr{E}$ 称为集 X 上的集类，如果 $\mathscr{E}$ 中的每个元都是集 X 的子集。集 X 的所有子集的全体记为 $\mathscr{P}(X)$。

设 $\mathscr{E}$ 是一个集类。定义

$\bigcup_{E\in\mathscr{E}}E=\{x:x\in E$ 对某个 $E\in\mathscr{E}\}$,

$\bigcap_{E\in\mathscr{E}}E=\{x:x\in E$ 对一切 $E\in\mathscr{E}\}$。

如果 $\mathscr{E}$ 中每个集可以赋予一个足码,即

$\mathscr{E}=\{E_\alpha:\alpha\in A\}$,

这里 A 是一个集,那么上述和、交可以记为

$\bigcup_{\alpha\in A}E_\alpha$(或简记为 $\bigcup E_\alpha$),

$\bigcap_{\alpha\in A}E_\alpha$(或简记为 $\bigcap E_\alpha$)。

如果 $A=N$,那么上述和、交又可记为

$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$(或 $\bigcup_1^\infty E_n$, $\bigcup E_n$), $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$(或 $\bigcap_1^\infty E_n$, $\bigcap E_n$)。

命题 2 对于集类我们有狄莫更(De Morgan)法则:

1) $E-\bigcup_{\alpha\in A}E_\alpha=\bigcap_{\alpha\in A}(E-E_\alpha)$;

2) $E-\bigcap_{\alpha\in A}E_\alpha=\bigcup_{\alpha\in A}(E-E_\alpha)$。

证明:1)设 $x\in E-\bigcup E_\alpha$,那么 $x\in E$,且不属于任一 E_α。因此 $x\in E-E_\alpha$ 对一切 $\alpha\in A$ 成立,也即 $x\in\bigcap(E-E_\alpha)$。反过来,如果 $x\in\bigcap(E-E_\alpha)$,那么对一切 $\alpha\in A$ 有 $x\in E-E_\alpha$,即 $x\in E$,但对一切 $\alpha\in A$, $x\overline{\in}E_\alpha$,因此 $x\in E-\bigcup E_\alpha$。

2)的证明类似,留作习题。

注 1 利用狄莫更法则我们可以给集合等式一种演绎式的证明。例如命题 1 的 8)式可以这样证明:视 E 为基本集,则

$$E-F=E-(\varnothing\cup F)=(E-\varnothing)\cap(E-F)=E\cap F^c。$$

利用命题 1 的 8)式和狄莫更法则可以证明 7)式:

$$E-(F\cup G)=(E-F)\cap(E-G)=(E-F)\cap(X-G)$$
$$=(E-F)-G,$$

(这里 X 是基本集)。

在数学分析中我们已知单调有界数列必有极限。任给一个数列 $\{a_n\}$,它未必单调,但我们可以用 $\{a_n\}$ 构造两个单调数列:

$$b_n=\sup_{k\geqslant n}a_k,\quad c_n=\inf_{k\geqslant n}a_k。$$

易见$\{b_n\}$单调不增，$\{c_n\}$单调不减。因此$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n$存在，且

$$\lim c_n \leqslant \lim b_n。$$

我们称$\lim c_n$为$\{a_n\}$的下极限，记为$\varliminf\limits_{n\to\infty}a_n$；$\lim b_n$称为$\{a_n\}$的上极限，记为$\varlimsup\limits_{n\to\infty}a_n$。如果两者相等，那么极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在且与其上、下极限相等。

对集合序列也有类似的情形。设$\{E_n\}_1^\infty$（以后常记为$\{E_n\}$）是一个集列，如果对一切$n\in N$有$E_n\subset E_{n+1}$（$E_n\supset E_{n+1}$），那么称$\{E_n\}$为扩张列或单调增列（收缩列或单调降列），记为$\{E_n\}\uparrow$（$\{E_n\}\downarrow$）。扩张列和收缩列统称为单调列。对任意给定的集列$\{E_n\}$，我们可以构造收缩列$\{F_n\}$和扩张列$\{G_n\}$：

$$F_n=\bigcup_n^\infty E_k;\quad G_n=\bigcap_n^\infty E_k。$$

再定义

$$\varlimsup_{n\to\infty}=\bigcap_{n=1}^\infty\bigcup_{k=n}^\infty E_k,\ \varliminf_{n\to\infty}E_n=\bigcup_{n=1}^\infty\bigcap_{k=n}^\infty E_k,$$

分别称为$\{E_n\}$的上、下限集。

命题 3　设$\{E_n\}$是一个集列，那么

1）$\varlimsup\limits_{n\to\infty}E_n=\{x:x$属于无穷多个$E_n\}$；

2）$\varliminf\limits_{n\to\infty}E_n=\{x:x$只不属于有穷多个$E_n\}$。

证明：1）如果$x\in\varlimsup\limits_{n\to\infty}E_n$，那么对一切$n\in N$有$x\in F_n$，从而对某个$k\geqslant n$，有$x\in E_k$。假设先取$n_1=1$，则有$k_1\geqslant 1$使$x\in E_{k_1}$。令$n_2=k_1+1$，则有$k_2\geqslant n_2$，使$x\in E_{k_2}$。如此继续下去，必有$k_1<k_2<\cdots$使$x\in E_{k_j}$。反之，假设有自然数的严格单调增序列$\{k_j\}$使$x\in E_{k_j}$，那么对任一$n$，有某个$k_j>n$使$x\in E_{k_j}$。因此对任一$n$有$x\in\bigcup_n^\infty E_k=F_n$，从而$x\in\bigcap F_n$。

2）的证明类似，留作习题。

命题 4　设$\{E_n\}$是一个集列，E是一个集，那么

1）$E-\varliminf\limits_{n\to\infty}E_n=\varlimsup\limits_{n\to\infty}(E-E_n)$；

2) $E-\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(E-E_n)$。

证明：1)法一：设 $x\in$ 左边，则 $x\in E$，且 $\overline{\in}\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n$，因此 x 不属于无穷多个 E_n。这样 $x\in E-E_n$ 对无穷多个 n 成立，因此 $x\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(E-E_n)$。反过来，设 $x\in$ 右边，则 $x\in E-E_n$ 对无穷多个 n 成立，因此 $x\overline{\in}E_n$ 对无穷多个 n 成立，也即 $x\overline{\in}\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n$。所以 $x\in$ 左边。

法二：用演绎法。

$$E-\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n=E-\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k\geqslant n}E_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}(E-\bigcap_{k\geqslant n}E_k)$$

$$=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geqslant n}(E-E_k)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(E-E_n)。$$

2)证明类似，留作习题。

如果$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n$，那么称集列$\{E_n\}$是收敛的。称 $E=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n$ 是$\{E_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}E_n$（简记为 $\lim E_n$）。

命题 5

1)如果$\{E_n\}$单调增，那么 $\lim E_n=\bigcup E_n$；

2)如果$\{E_n\}$单调降，那么 $\lim E_n=\bigcap E_n$。

证明：1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$；

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$。

因此上、下限集相等，均为$\bigcup E_n$，故 $\lim E_n=\bigcup E_n$。

2)的证明类似，留作习题。

注 2　从上、下限集的定义可以看出，由一个集列$\{E_n\}$可以定义与其相关的具有某些特殊性质的集列。例如

1) $F_1=E_1, F_n=\bigcup_{k=1}^{n}E_k$。易见$\{F_n\}$递增，且$\bigcup_1^m F_j=\bigcup_1^m E_j$ $(m\leqslant\infty)$。

2) $G_1=E_1, G_n=E_n-\bigcup_1^{n-1}E_j$。易见 G_n 互不相交，且$\bigcup_1^m G_j=\bigcup_1^m E_j$ $(m\leqslant\infty)$。

3) $H_1=E_1, H_n=\bigcap_1^n E_j$。易见$\{H_n\}$递减，且$\bigcap_1^m H_j=\bigcap_1^m E_j$ $(m\leqslant\infty)$。

下面我们将把函数概念扩充为映射概念。设 X、Y 是两个集合，D 为 X 的一个子集。如果存在一个规则 f，使对任一 $x\in D$，有一个确定的 $y\in Y$ 与之对应，那么称 f 是从 D 到 Y 的一个映射，记为 $f:D\to Y$。y 称为 x 在 f 映射下的像，记为 $f(x)$。D 称为 f 的定义域，记为 $D(f)$。如果 $E\subset X,F\subset Y$，那么集合

$$f(E)=\{f(x):x\in E\cap D\},$$

$$f^{-1}(F)=\{x\in D:f(x)\in F\}$$

分别称为 E 在 f 映射下的像，F 在 f 映射下的原像。$f(D)$称为 f 的值域，记为 $R(f)$。易见如果 $E_1\subset E_2\subset D$，那么 $f(E_1)\subset f(E_2)$；如果 $F_1\subset F_2\subset Y$，那么 $f^{-1}(F_1)\subset f^{-1}(F_2)$。

设 $y\in R(f)$，则$\{y\}$是 Y 的一个单点子集，因此 $f^{-1}(\{y\})$有定义，且是 D 的一个子集。如果对任一 $y\in R(f)$，$f^{-1}(\{y\})$都是一个单点集，那么称 f 是 D 上的一个单射。此时定义

$$f^{-1}(y)=f^{-1}(\{y\}),$$

称 f^{-1}为 f 在 $R(f)$上的逆映射。这样符号 f^{-1}有两种意义：一种是从集合到集合的映射，它对任何映射都有意义；一种是从点到点的映射，它仅对单射有意义。

如果 $R(f)=Y$ 则称 f 是从 D 到 Y 上的满射。如果 $D(f)=X$，$R(f)=Y$，且 f 又是单射，那么称 f 是从 X 到 Y 上的双射，或一一映射。此时 f^{-1}作为点函数在 Y 上有定义，称 f 为可逆映射。

设 B 是一个集合，定义 $B^2=B\times B$，类似地可以定义 B^n，称为 B 的 n 次幂集。如果 A 也是一个集合，定义 $B^A=\prod_{\alpha\in A}B_\alpha(B_\alpha=B)$，易见这个幂集就是从 A 到 B 的映射的全体。

如果 $f:X\to Y,g:Y\to Z$，也即 $D(g)\supset R(f)$，那么可以定义映射 $g\circ f(x)=g(f(x))$，称为 f 与 g 的复合。

命题 6 设 f 是从 X 到 Y 的映射，E、$E_\alpha(\alpha\in A)\subset X$，$F$、$F_\alpha(\alpha\in A)\subset Y$，那么

1) $f(\bigcup E_\alpha)=\bigcup f(E_\alpha)$，$f(\bigcap E_\alpha)\subset\bigcap f(E_\alpha)$；

2) $f^{-1}(\bigcup E_\alpha)=\bigcup f^{-1}(E_\alpha)$，$f^{-1}(\bigcap E_\alpha)=\bigcap f^{-1}(E_\alpha)$，

$f^{-1}(E^c)=f^{-1}(E)^c$；

3)$f(f^{-1}(F))\subset F, f^{-1}(f(E))\supset E$。

证明：1)的第2式。因为$\bigcap E_\alpha \subset E_\alpha$，所以$f(\bigcap E_\alpha)\subset f(E_\alpha)$，从而$f(\bigcap E_\alpha)\subset \bigcap f(E_\alpha)$。这个包含关系可能是真包含，例如令$f(x)\equiv 1$，对$x\in[0,\infty)$，记$E_n=(n,n+1)$，那么$f(\bigcap E_n)=f(\varnothing)=\varnothing\subsetneqq\{1\}=\bigcap\{1\}=\bigcap f(E_n)$。

2)的第2式。设$x\in f^{-1}(\bigcap E_\alpha)$，则$f(x)\in\bigcap E_\alpha$，因此$f(x)\in E_\alpha$对一切$\alpha$成立。这表明$x\in f^{-1}(E_\alpha)$对一切$\alpha$成立，也即$x\in\bigcap f^{-1}(E_\alpha)$。易见上述证明是可逆的，因此$f^{-1}(\bigcap E_\alpha)=\bigcap f^{-1}(E_\alpha)$。

3)的第1式的包含关系可由f^{-1}的定义直接得到。这里的包含关系也可以是真包含，例如令$f(x)=\frac{1}{2}x$，对$x\in[0,1]$。记$F=[0,1]$，那么$f^{-1}(F)=[0,1]$，$f(f^{-1}(F))=[0,\frac{1}{2}]\subsetneqq F$。第2式的包含关系也可由$f^{-1}$的定义直接得到。现举例说明包含也可能是真包含。令$f(x)=1$对$x\in[0,1]$，记$E=[0,\frac{1}{2}]$，那么$f(E)=\{1\}$，$f^{-1}(f(E))=[0,1]\supsetneqq E$。

其余的留作习题。

下面我们要用集合序列来表示函数列的收敛性质。设$f:X\to\boldsymbol{R}$为定义在X上的实函数。如果$f_n:X\to\boldsymbol{R}$，$E\subset X$，$c\in\boldsymbol{R}$，那么记

$E(f\geqslant c)=\{x\in E:f(x)\geqslant c\}$，

$E(f_n\to f)=\{x\in E:f_n(x)\to f(x)\}$。

命题7 设f、f_n为从X到$\boldsymbol{R}$的函数，$E\subset X$，$c,d\in\boldsymbol{R}$，那么

1)$E(f\geqslant c)\cup E(f<c)=E$，$E(f\geqslant c)\cap E(f<c)=\varnothing$；

2)$E(f>c)\cap E(f\leqslant d)=E(c<f\leqslant d)$；

3)$E(f^2>c)=E(f>\sqrt{c})\cup E(f<-\sqrt{c})(c\geqslant 0)$；

4)$E(f>c)=\bigcup_1^\infty E(f\geqslant c+\frac{1}{n})$；

5)$E(f_n\to f)=\bigcap_{k=1}^\infty \varliminf_{n\to\infty} E(|f_n-f|<\frac{1}{k})$；

6)$E(f_n$ 一致收敛于 $f)=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n\geqslant n_k}E(|f_n-f|<\frac{1}{k})$，其中$\{n_k\}$是自然数的一个严格增列。

证明：我们仅证 3)、4)、5)、6)，其余留作习题。

3)设 $x\in$ 左边，则 $f^2(x)>c$，因此 $f(x)>\sqrt{c}$ 或者 $f(x)<-\sqrt{c}$。所以 $x\in E(f>\sqrt{c})$，或者 $x\in E(f<-\sqrt{c})$，也即 $x\in$ 右边。易见上述证明也是可逆的，因此左边等于右边。

4)设 $x\in E(f>c)$，那么 $f(x)>c$，于是有 n 使 $f(x)\geqslant c+\frac{1}{n}$，所以 $x\in\bigcup E(f\geqslant c+\frac{1}{n})$。反过来，如果 $x\in\bigcup E(f\geqslant c+\frac{1}{n})$，那么对某个 n 有 $f(x)\geqslant c+\frac{1}{n}$，当然有 $x\in E(f>c)$。

5)设 $f_n(x)\to f(x)$，那么对任一 k，有 $N=N(x,k)$使当 $n\geqslant N$ 时有 $|f_n(x)-f(x)|<1/k$，即 $x\in\bigcap_{n=N}^{\infty}E(|f_n-f|<1/k)\subset\underline{\lim}_{n\to\infty}E(|f_n-f|<1/k)$，所以 $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\underline{\lim}_{n\to\infty}E(|f_n-f|<1/k)$。反过来，如果 $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\underline{\lim}_{n\to\infty}E(|f_n-f|<1/k)$，那么对任一 $k\in N$，$x\in\underline{\lim}_{n\to\infty}E(|f_n-f|<1/k)$，因此存在 $N=N(x,k)$，当 $n\geqslant k$ 时，$x\in E(|f_n-f|<1/k)$，即当 $n\geqslant N$ 时，$|f_n(x)-f(x)|<1/k$，这表明 $f_n(x)\to f(x)$。

6)记 $F=E(f_n$ 一致收敛于 $f)$，$G=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n\geqslant n_k}E(|f_n-f|<1/k)$。则对任一 $k>0$，有 n_k，使当 $n\geqslant n_k$ 时有 $|f_n(x)-f(x)|<1/k$，对 $x\in F$ 成立。因此 $F\subset\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n\geqslant n_k}E(|f_n(x)-f(x)|<1/k)=G$。反过来，对任一 k，$G\subset\bigcap_{n\geqslant n_k}E(|f_n-f|<1/k)$，也即对 $n\geqslant n_k$ 有 $|f_n(x)-f(x)|<1/k$。因此 f_n 在 G 上一致收敛于 f，所以 $G\subset F$。于是 $G=F$。

下面我们建立集合与函数，以及集合的运算与函数的运算的对应关系。为方便起见，用$\forall\ x\in E$ 表示对 E 中每一个 x。

设 E 是一个集合，定义

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1 & \forall\ x\in E,\\ 0 & x\overline{\in}E,\end{cases}$$

称为 E 的特征函数。

命题 8 设 X 是基本集，A、B、A_α、A_n 均为 X 的子集，则

1)$A=X$ 当且仅当 $\chi_A(x)=1$，$A=\varnothing$ 当且仅当 $\chi_A(x)=0$；

2)$A\subset B$ 当且仅当 $\chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)$，$A=B$ 当且仅当 $\chi_A(x)=\chi_B(x)$；

3)$\chi_{\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha}(x)=\max\limits_{\alpha\in I}\chi_{A_\alpha}(x)$，$\chi_{\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha}(x)=\min\limits_{\alpha\in I}\chi_{A_\alpha}(x)$，

这里 I 是指标集；

4)$\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}(x)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)$，

$\chi_{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}(x)=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)$；

5)极限 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$存在，后者存在又当且仅当

$\chi_{\lim\limits_{n\to\infty}A_n}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$。

证明：3)易见

$$\chi_{\bigcup A_\alpha}(x)=\begin{cases}1 & x\in\bigcup A_\alpha\\ 0 & x\overline{\in}\bigcup A_\alpha\end{cases}=\begin{cases}1 & x\in\text{某个 }A_\alpha\\ 0 & x\overline{\in}\bigcup A_\alpha\end{cases}=\max_{\alpha\in I}\chi_{A_\alpha}(x)。$$

4)易见

$$\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n}(x)=\begin{cases}1 & x\in\overline{\lim}A_n\\ 0 & x\overline{\in}\overline{\lim}A_n\end{cases}=\begin{cases}1 & x\text{ 属于无穷多个 }A_n,\\ 0 & x\text{ 只属于有穷多个 }A_n,\end{cases}$$
$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}\chi_{A_n}(x)。$$

5)作为 4)的推论有 $\lim A_n$ 存在当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)$存在。第 2 个充要条件的证明由下面一连串“$\langle=\rangle$”组成。

$\lim\chi_{A_n}(x)=1\langle=\rangle\overline{\lim}\chi_{A_n}(x)=1=\underline{\lim}\chi_{A_n}(x)\langle=\rangle\chi_{A_n}(x)=1$ 只对有穷多个 n 不成立$\langle=\rangle x$ 只不属于有穷多个 $A_n\langle=\rangle x\in\lim A_n$ $\langle=\rangle\chi_{\lim A_n}(x)=1$。

习　题

A 类

1. 证明命题 1 的未证部分。

2. 证明：

1) $A-B=A-A\cap B=(A\cup B)-B$；

2) $A-(A-B)=A\cap B$；

3) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$；

4) $(A-B)\cap(C-D)=A\cap C-(B\cup D)$；

5) $(A-B)\cup(C-D)\supset(A\cup C)-(B\cup D)$；

6) $(A-B)\cup(C-D)\subset(A\cup C)-(B\cap D)$。

(举例说明 5)、6) 的 $\supset$ 与 $\subset$ 不能换成 $=$。)

3. 1) 等式 $(A-B)\cup C=A-(B-C)$ 成立的充要条件是什么？

2) 证明：$(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$，

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)。$$

4. 设 A、B、C 是 X 的三个子集，记 $D=A\cap(B\cap C^c)^c$，证明：

1) $D\cap B\cap C=A\cap B\cap C$；

2) $D\cap B\cap C^c=\varnothing$；

3) $D\cap B^c\cap C=A\cap B^c\cap C$；

4) $D\cap B^c\cap C^c=A\cap B^c\cap C^c$。

5. 证明命题 2. 2)。

6. 证明：1) $(\bigcup A_\alpha)-B=\bigcup(A_\alpha-B)$；

2) $(\bigcap A_\alpha)-B=\bigcap(A_\alpha-B)$。

7. 设 $\mathscr{P}(X)$ 是 X 的所有子集的族，证明

1) $\mathscr{P}(X)\cap\mathscr{P}(Y)=\mathscr{P}(X\cap Y)$，

2) $\mathscr{P}(X)\cup\mathscr{P}(Y)\subset\mathscr{P}(X\cup Y)$。

8. 如果 $\{A_n\}_0^\infty$ 是单调减少的集列，证明集列 $\{A_n-A_{n+1}\}_{n=0}^\infty$ 中各项互不相交。

9. 证明命题 3.2)。

10. 设$A_{2n-1}=(0,\frac{1}{n})$，$A_{2n}=(0,n)$，求

$\underline{\lim}A_n$ 和 $\overline{\lim}A_n$。

11. 设 $A_{2n+1}=[0,2-\frac{1}{2n+1}]$，$A_{2n}=[0,1+\frac{1}{2n}]$，求

$\underline{\lim}A_n$ 和 $\overline{\lim}A_n$。

12. 证明命题 4.2)。

13. 证明命题 7 的剩余部分。

14. 设$\{f_n(x)\}$是$E=[a,b]$上的实函数的递增序列，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$。证明对任何实数 c 有

$$E(f>c)=\bigcup_1^\infty E(f_n>c),$$

$$E(f\leqslant c)=\bigcap_1^\infty E(f_n\leqslant c)=\lim_{n\to\infty}E(f_n\leqslant c)。$$

15. 设 f 是定义在集 E 上的实函数，$c\in R$，证明

1)$E(f(x)\geqslant c)=\bigcup_1^\infty E(c\leqslant f<c+n)$；

2)$E=\bigcup_1^\infty E(-n\leqslant f)=\bigcup_1^\infty E(f<n)$；

3)$E(f<c)=\bigcup_1^\infty E(f\leqslant c-\frac{1}{n})$。

16. 证明：1)$A\Delta B=(A\cap B^c)\cup(A^c\cup B)$；

2)$\chi_{A\Delta B}(x)=|\chi_A(x)-\chi_B(x)|$；

3)$A\Delta B=\{x:\chi_A(x)\neq\chi_B(x)\}$。

17. 证明：1)$A\Delta B=(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$；

2)$A\Delta C=(A\Delta B)\cup(B\Delta C)$；

3)$\chi_{A\Delta B}(x)=|\chi_A(x)-\chi_B(x)|$；

4)$A\Delta B=\{x:\chi_A(x)\neq\chi_B(x)\}$。

第二节　等价关系与序关系

本节我们将简单地考察集的元素间的关系，其中的主要结果将在以后的章节中用到。

定义 1　集合 X 的元素间满足下面三个条件的关系"$\sim$"称为等价关系，

1)自反性：对一切 $x\in X$ 有 $x\sim x$；

2)对称性：如果 $x\sim y$，那么 $y\sim x$；

3)传递性：如果 $x\sim y, y\sim z$，那么 $x\sim z$。

设"$\sim$"是集 X 上的一个等价关系，任取 $x\in X$，令 $\tilde{x}=\{x'\in E: x'\sim x\}$，称 $\tilde{x}$ 为 x 定义的等价类。显然等价类是 X 的互不相交的子集，并且 X 是所有等价类的并。把等价类的全体看成一个新的集合，称为 X 按照关系"$\sim$"得到的商集合，记为

$$\tilde{X}=X/\sim。$$

映射 $\Pi: x\in X\to\tilde{x}\in\tilde{X}$ 称为从 X 到 $\tilde{X}$ 上的典范映射。

例 1　记 $X=\{(a,b): a,b\in Z, b\neq 0\}$，定义 $(a,b)\sim(a',b')$，如果 $ab'=a'b$。易见 $\tilde{X}$ 就是有理数的全体，即 $\tilde{X}=Q$。

在重要性方面仅次于等价关系的是序关系。

定义 2　集合 X 的部分(全体)元素之间的关系"$\prec$"称为一个半(全)序，如果有

1)自反性：对任一 $x\in X$ 有 $x\prec x$；

2)对称性：如果 $x\prec y, y\prec x$，那么 $x=y$；

3)传递性：如果 $x\prec y, y\prec z$，那么 $x\prec z$。

这时称 X 为半(全)序集。

例如集类 $\mathscr{P}(X)$ 中的元按包含关系成为一个半序集。实数集 R 中的元的大小关系是一个全序。复数域 C 中的元 $\alpha+i\beta$ 和 $\alpha'+i\beta'$，当

$\alpha\leqslant\alpha'$并且 $\beta\leqslant\beta'$时，定义前者小于后者，那么 C 是一个半序集。

次序关系也能用图来定义。例如设 $X=\{a,b,c,d,e\}$，用 $x\rightarrow y$ 表示 y 是 x 的直接后继，即 $x\prec y$，且没有 z 使 $x\prec z\prec y$。则图 1 规定了集合 X 中的一个半序。

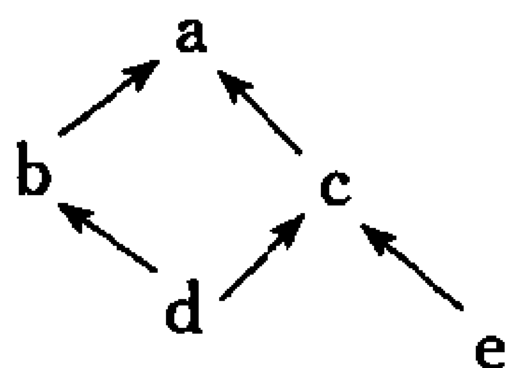


图1

下面我们来介绍与序集有关的几个重要概念。设 X 是一个半序集，$x\in X$ 称为 X 的极大(小)元，如果 X 中没有大(小)于 x 的元，也即如果有 $y\in X$，且 $x\prec y(y\prec x)$，那么 $y=x$。对一个半序集来讲，它未必有极大元和极小元，即使有也未必唯一。例如图 2 所示的开单位圆盘(按复数域中的序关系)就没有极大元和极小元。如果把开单位圆盘换成闭单位圆盘，那么第一象限内的边界点皆为极大元，第三象限内的边界点皆为极小元。图 3 所示的闭正方形的边界点(1,1)是唯一的极大元，(−1,−1)是唯一的极小元。

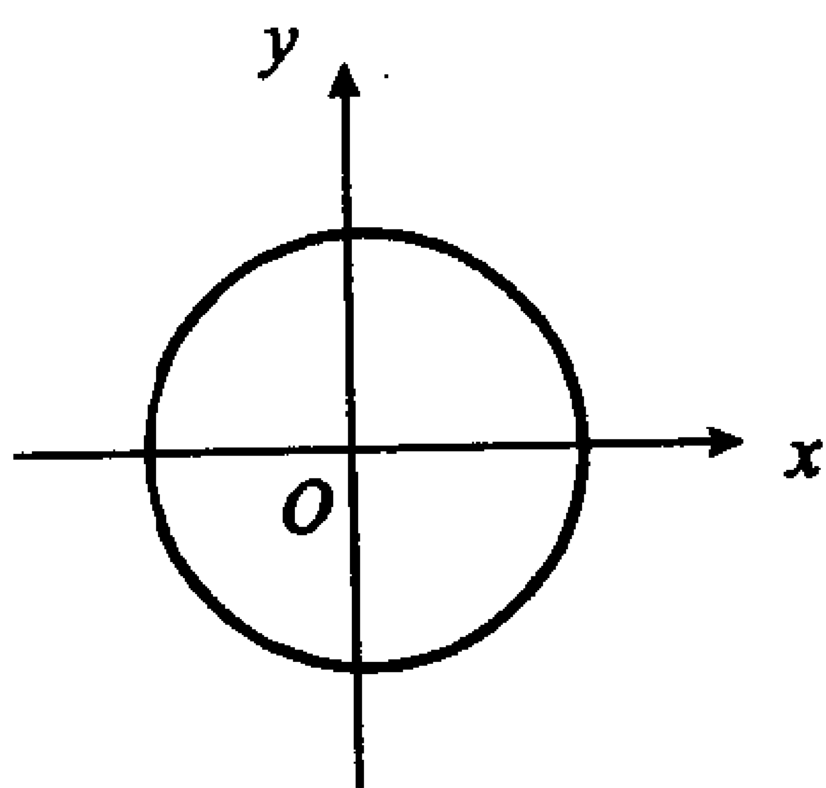


图 2

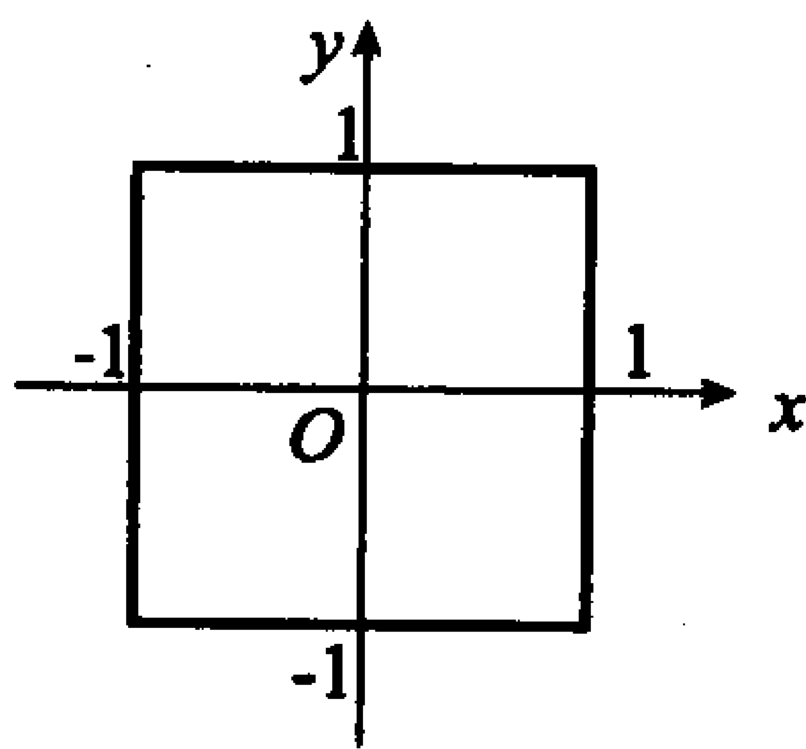


图 3

元 $x\in X$ 称为 X 的最大(小)元，如果 x 大(小)于 X 中所有的元，即 $y\prec x(x\prec y)$，$\forall\ y\in X$。与极大、极小元情形相似，一个半序集未必有最大元和最小元。但是与极大(小)元相反，一个半序集如果有最大(小)元，那么由序关系的对称性，它必定是唯一的。易见图 3 中

的(1.1)((−1,1))就是所示集合的最大(小)元。

设 X 是一个半序集，$A\subset X$(允许 $A=X$)，一个元素 $b\in X$ 称为 A 的一个下(上)界，如果 $b\preceq a$($a\preceq b$)对一切 $a\in A$ 成立。和极小元的情形一样，一个集合未必有下(上)界，即使有也未必唯一，即使唯一也未必属于这个集合。此外一个集合的极大(小)元也未必是这个集合的一个上(下)界。集合 A 的最小(大)的上(下)界称为 A 的上(下)确界，记为 $\sup(A)$($\inf(A)$)。有上(下)界的集合称为界于上(下)，既界于上又界于下的集合称为有界的。

注 1 下面的结论是显而易见的。

1)如果 $\inf(A)$和 $\sup(A)$都存在，则 $\inf(A)\prec\sup(A)$。

2)如果 $A\subset B\subset X$，且 $\inf(A)$和 $\inf(B)$存在，则 $\inf(B)\leqslant\inf(A)$；类似地有 $\sup(B)\geqslant\sup(A)$，如果它们都存在的话。

3)如果 A 有最小元 a，则 $\inf(A)=a$；如果 A 有最大元 b，则 $\sup(A)=b$。

下面的引理是处理无限过程的重要工具，我们作为公理来接受。

佐恩(Zorn)引理 设 X 是一个半序集，如果 X 的每个全序子集都有(属于 X 的)上界，那么 X 必有极大元。

对引理的结论我们用图 2 来作一直观说明。在图 2 所示的开单位圆盘 D 中任意画一条两头延伸至边界的单调增曲线 Γ。易见 Γ 是 D 的一个全序子集，但是在 D 中无上界，因此我们不能推断 D 有极大元。事实上我们前已指出 D 无极大元。现在考虑闭单位圆盘 $\overline{D}$。$\overline{D}$ 中任意一条单调增曲线 Γ(不论它与边界相交与否)都有上界，因此由佐恩引理 $\overline{D}$ 有极大元，事实也正是如此。

对引理的思想我们可以这样来理解。记 $\mathscr{M}=\{\gamma:\gamma$ 是 X 中的全序子集$\}$，在 $\mathscr{M}$ 中按包含关系引入序关系，那么 $\mathscr{M}$ 成为一个有序集。任取 $\gamma\in\mathscr{M}$，如果 γ 是一个极大全序子集，那么它的上界(当然是按 X 中的序)就是 X 的一个极大元。如果 γ 不是极大全序子集，那么必存在一个包含 γ 的全序子集的极大链$\{\gamma_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，即 Λ 是一个全序指标集，对 $\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda$，$\lambda_1\prec\lambda_2$ 有 $\gamma_{\lambda_1}\subset\gamma_{\lambda_2}$。令 $\Gamma=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\gamma_\lambda$，易见 Γ 也是 X

中的一个全序子集，它的上界显然是 X 的一个极大元。

与佐恩引理等价的是另一个公理，即

策墨罗(Zermelo)选择公理 设 $S=\{M\}$ 是一族两两不相交的非空的集，那么存在集 L 满足下面两个条件：

1) $L\subset\bigcup_{M\in S}M$；

2) 对 S 中任一 M，$L\cap M$ 是单点集。

等价性的证明我们就不介绍了。

第三节 势

本节我们将讨论一个集合所含元素个数多少的问题。

仅含有限个元素的集称为有限集，对有限集我们可以直接比较集合所含元素的多少。不是有限集的集称为无限集，对无限集就比较困难了。例如记

$$N_1=\{2n-1\}_1^{\infty},$$

显然 $N_1\subsetneq N$，N_1 所含的元素确实比 N 所含的元素少，但是我们却不能说 N_1 所含的元素的个数比 N 所含的元素的个数少。因为对任一 $n\in N$，都有 $2n-1\in N_1$ 与之对应。因此有必要建立一套规则来比较无限集所含元素的多少。

定义 1 设 E 和 F 是两个集，$\varphi:E\to F$ 是一个双射，那么说 E 和 F 是对等的，记为 $E\overset{\varphi}{\sim}F$（或简记为 $E\sim F$）。

易见对等关系是一个等价关系。两个集合对等表明它们所含元素个数一样，当然它们所含的元素的具体性质可能是完全不一样的。

定理 1 设 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$、$\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是两个集族，E_α 两两不相交，F_α 也两两不相交。如果对每一个 α 有 $E_\alpha\sim F_\alpha$，那么 $\bigcup E_\alpha\sim\bigcup F_\alpha$。

证明：设 $f_\alpha:E_\alpha\to F_\alpha$ 是一个双射。定义映射 $f:\bigcup E_\alpha\to\bigcup F_\alpha$ 如下

$$f(x)=f_\alpha(x)\qquad\forall\ x\in E_\alpha。$$

易见 f 是一个双射，所以 $\bigcup E_\alpha\sim\bigcup F_\alpha$。

定义 2 如果 E 与 F 对等，那么称 E 和 F 具有相同的势，记为 $\overline{\overline{E}}=\overline{\overline{F}}$，其中 $\overline{\overline{E}}(\overline{\overline{F}})$ 表示 $E(F)$ 的势。如果 E 与 F 的一个子集对等，那么说 E 的势不大于 F 的势，记为 $\overline{\overline{E}}\leqslant\overline{\overline{F}}$。

应该指出的是定义 2 并没有直接给出势的定义，只是说对等的集具有相同的势。因此势是对等集的共同属性，两个对等的集所含元素的性质可以完全不同，但是它们之间可以一一对应，因此势这个概念反映的是集所含元素的多少。

定理 2 对任意两个集 X、Y 必有 $\overline{\overline{X}}\geqslant\overline{\overline{Y}}$，或者 $\overline{\overline{Y}}\leqslant\overline{\overline{X}}$。

证明：我们采用以后经常要使用的构造辅助集的办法。定义非空集

$\mathscr{M}=\{(E,\varphi(E)):E\subset X,\varphi:E\to\varphi(E)$ 是一个双射，$\varphi(E)\subset Y\}$，在 $\mathscr{M}$ 上定义序关系"$\prec$"：规定 $(E,\varphi(E))\prec(F,\psi(F))$，如果 $E\subset F\subset X$，并且 ψ 在 E 上的限制 $\psi|_E=\varphi$。我们首先指出 $\mathscr{M}\neq\varnothing$，因为任取 $e\in X$，$f\in Y$，定义 $\varphi(e)=f$，那么 $(\{e\},\varphi(\{e\}))\in\mathscr{M}$。然后再证明 $\mathscr{M}$ 满足佐恩引理的条件。设 $\{(E_\alpha,\varphi_\alpha(E_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是 $\mathscr{M}$ 中的一个全序子集，令 $E=\bigcup E_\alpha$，在 E 上按定理 1 证明中的方法定义一个映射 $\varphi:\bigcup E_\alpha\to\varphi(\bigcup E_\alpha)$，易见 $(E,\varphi(E))$ 是上述全序子集的一个上界。由佐恩引理 $\mathscr{M}$ 有一个极大元 $(F,\varphi(F))$。如果 $F\neq X$，并且 $\varphi(F)\neq Y$，那么可取 $x_0\in X-F$，$y_0\in Y-\varphi(F)$，并且扩充 φ 的定义，令 $\varphi(x_0)=y_0$，于是 $(F,\varphi(F))\prec(F\cup\{x_0\},\varphi(F\cup\{x_0\}))$。因此 $(F,\varphi(F))$ 不是 $\mathscr{M}$ 的极大元，矛盾。所以必有 $E=X$ 或者 $\varphi(F)=Y$。如果 $F=X$，那么 $\overline{\overline{X}}\leqslant\overline{\overline{Y}}$；如果 $\varphi(F)=Y$，那么 $\overline{\overline{Y}}\leqslant\overline{\overline{X}}$。

定理 3（伯恩斯坦(Bernstein)定理） 设 X、Y 是两个集合，如果 $\overline{\overline{X}}\leqslant\overline{\overline{Y}}$，$\overline{\overline{Y}}\leqslant\overline{\overline{X}}$，那么 $\overline{\overline{X}}=\overline{\overline{Y}}$。

证明：由定理的条件应有双射 $\varphi:X\to Y_1\subset Y$ 和 $\psi:Y\to X_1\subset X$。令 $f=\psi\circ\varphi:X\to X$，定义集合序列

$$X_2=f(X),X_{2n+2}=f(X_{2n}),X_{2n+1}=f(X_{2n-1})$$

$$\forall\, n=1,2,\cdots。$$

不难验证(见图1)

$$X\supset X_1\supset X_2\supset\cdots,\qquad Y\supset Y_1\supset Y_2\supset\cdots,$$

$$X\sim X_2\sim X_4\cdots,\qquad X_1\sim X_3\sim X_5\cdots,$$

并且 X、X_1 可以分解为不相交子集的并

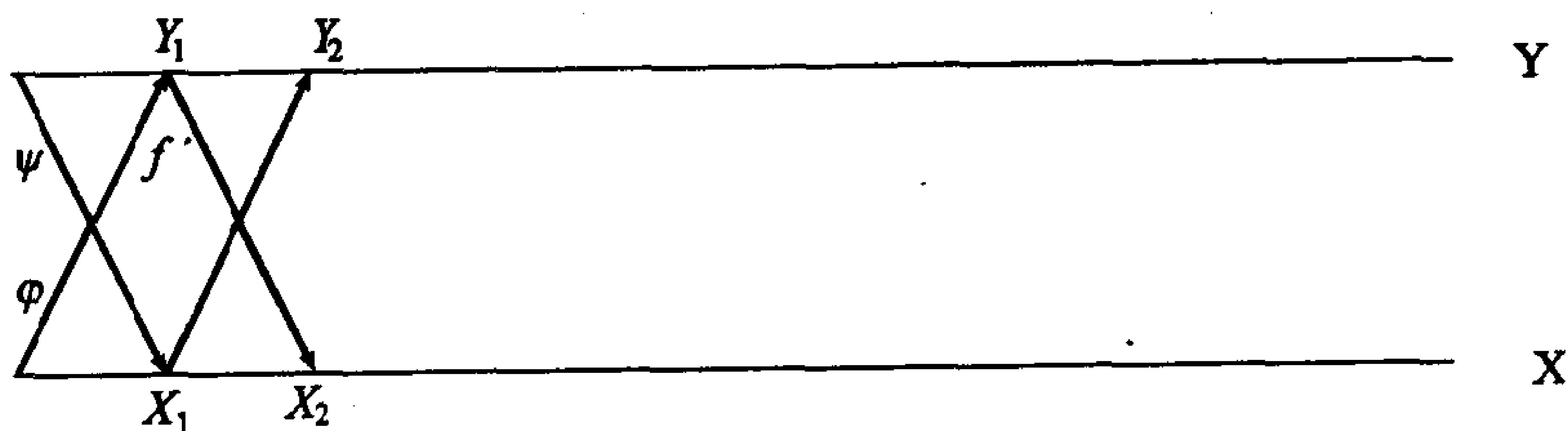


图 1

$$X=Z\cup(X-X_1)\cup(X_1-X_2)\cup(X_2-X_3)\cup(X_3-X_4)\cup\cdots$$

$$X_1=Z\cup(X_1-X_2)\cup(X_2-X_3)\cup(X_3-X_4)\cup\cdots,$$

其中 $Z=\bigcap_{i=1}^{\infty}X_i$。因为 $X-X_1\overset{f}{\sim}X_2-X_3,X_2-X_3\overset{f}{\sim}X_4-X_5,\cdots$ 由命题2有 $X\sim X_1$。因为 $X_1\sim Y$,所以 $X\sim Y$。

定理 4 对任何集合 X,必有 $\overline{\overline{X}}<\overline{\overline{\mathscr{P}(X)}}$。

证明:显然有 $\overline{\overline{X}}\leqslant\overline{\overline{\mathscr{P}(X)}}$。假设 $\overline{\overline{X}}=\overline{\overline{\mathscr{P}}}(X)$,那么有双射 $\varphi:X\to\mathscr{P}(X)$。定义辅助集

$$E=\{x\in X:x\overline{\in}\varphi(x)\},$$

(即使 $E=\varnothing$,它也是 $\mathscr{P}(X)$ 中的一个元素),那么 $E\overline{\in}R(\varphi)$,因此 φ 不是双射。事实上,如果有 $x_0\in X$ 使 $E=\varphi(x_0)$,那么 $x_0\in E$ 或者 $x_0\overline{\in}E$。如果 $x_0\in E$,那么按 E 的定义有 $x_0\overline{\in}\varphi(x_0)=E$,矛盾。如果 $x_0\overline{\in}E$,那么按 E 的定义有 $x_0\in\varphi(x_0)=E$,又得出矛盾。

下面我们来考虑最小的无限集。

定义 3 与 N 对等的集称为可列集,也称为可列无限集。

由定义可知,每一个可列集都可以排列成 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ 的

形式，这也是取名为可列集的原因。显然一个可列集并上一个有限集仍是一个可列集。

记 $\aleph_0=\overline{\overline{N}}$，读作阿列夫零(alephnull)。

定理 5

1)如果 $X_1,\cdots,X_n$ 是可列集，那么 $X_1\times\cdots\times X_n$ 也是可列集，

2)如果 $A_n(n\in N)$是可列集，那么$\bigcup A_n$ 也是可列集。

证明：1)由归纳法，我们只要证明 $n=2$ 的情形，也即证明 $N\times N$ 与 N 对等。对$(i,k)\in N\times N$，按 $n=j+k$ 由小到大排列成

$(1,1),(2,1),(1,2),(3,1),(2,2),(1,3),\cdots$,

并让它们依次对应于 $1,2,3,\cdots$。

2)由注 1.6.2)不妨设 A_n 互不相交。进一步还可设 A_n 仍为可列集，事实上，把只含有限多个元的 A_n 记为 A'_n，并定义 $A_0=\bigcup A'_n$，那么 A_0 至多仍是一个可列集。如果 A_0 是一个可列集，那么假设已真。如果 A_0 是一个有限集，显然不影响本定理的结论。设 $f_j:N\to A_j$ 是一个双射，定义 $f(n,j)=f_j(n)$，易见它是从 $N\times N$ 到$\bigcup A_j$ 的一个双射。

推论 1

1)$\mathbf{Z}$ 和 $\mathbf{Q}$ 都是可列集；

2)整系数多项式的全体是可列集。

证明：1)因为 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0\}\cup\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$是两个可列集的并，因此是可列的。$\mathbf{Q}=\{(p,q):p(q\in\mathbf{Z},q\neq0)=\mathbf{Z}\times(\mathbf{Z}-\{0\})\}$，由定理 5.1)$\mathbf{Q}$ 是可列集。

2)记 $P_n=\{a_0+a_1x+\cdots a_nx^n:a\in\mathbf{Z}\}$，易见 $P_n\sim Z_0\times\cdots\times Z_n$，其中 $Z_i=\mathbf{Z}$，因此 P_n 是可列的。用 P 记整系数多项式的全体，那么 $P=\bigcup P_n$，由定理 5.2)P 是可列的。

例 1　设 f 是$[a,b]$上的单调增函数，那么

1)f 的不连续点都是第一类间断点；

2)f 不连续点的全体至多是可列集；

3)f 在不连续点的左、右方跃度都是非负的，并且所有跃度的和

不超过 $f(b)-f(a)$。

证明：1）我们应证明 f 在不连续点的左、右侧极限 $f(x_-)$、$f(x_+)$ 存在且有限。设 x_0 为 f 的不连续点，对任一单调增趋于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，$\{f(x_n)\}$ 单调增且有界（$\leqslant f(x_0)$），因此 $\tau=\lim f(x_n)$ 存在且有限。我们要证明 $\tau=f(x_-)$。事实上，对任一 $\varepsilon>0$，存在 x_N 使 $\tau-\varepsilon<f(x_N)$，因此对 $x\in(x_N,x_0)$ 有 $\tau-\varepsilon<f(x)$。另一方面，对任何 $x<x_0$，有 $x_M\in(x,x_0)$，因此 $f(x)\leqslant f(x_M)\leqslant\tau$，这表明 $\tau=f(x_-)$。类似地可以证明 $f(x_+)$ 存在且有限。

2）记 $E=\{x\in(a,b):f$ 在 x 不连续$\}$。令 $\omega(x)=f(x_+)-f(x_-)$，那么 $E=\{x\in(a,b):\omega(x)>0\}=\bigcup_1^\infty E\{\omega(x)>\frac{1}{n}\}$。我们证明对任一 n，$E(\omega(x)>\frac{1}{n})$ 只含有限个点。事实上，在 $E(\omega(x)>\frac{1}{n})$ 中任取 p 个点，$a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_p\leqslant b$，再取 $y_0=a$，$x_i<y_i<x_{i+1}(i=1,\cdots,p-1)$，$y_p=b$，那么

$$\frac{p}{n}\leqslant\Sigma_1^p\omega(x_i)\leqslant\Sigma_1^p[f(y_i)-f(y_{i-1})]=f(b)-f(a),$$

因此 $p\leqslant n\{f(b)-f(a)\}$。

3）设 $\{x_n\}$ 是 f 不连续点全体，对任一 $p\in N$，不妨设 $x_1<\cdots<x_p$，那么有

$$\Sigma_1^p\omega(x_i)\leqslant f(b)-f(a)。$$

令 $p\to\infty$ 得 $\Sigma_1^\infty\omega(x_i)\leqslant f(b)-f(a)$。

下面的定理说明可列集是最小的无限集。

定理 6 设 A 是可列集或有限集，B 是无限集，那么 $\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{B}}$。

证明：先设 A 为可列集。因为 B 是无限集，必含有一个可列集 M 与 A 对等（见图 2）。分解 B 与 A 使 $B=(B-M)\cup M$，$A\cup B=(A-B)\cup M\cup(B-M)$。由定理 5.2）有 $(A-B)\cup M\sim M$，再由定理 1 有 $B\sim A\cup B$。如果 A 为有限集，上述证法仍然有效，请读者自证。

现在我们来讨论不可列集。

定理 7 区间 $[0,1]$ 不是可列集。

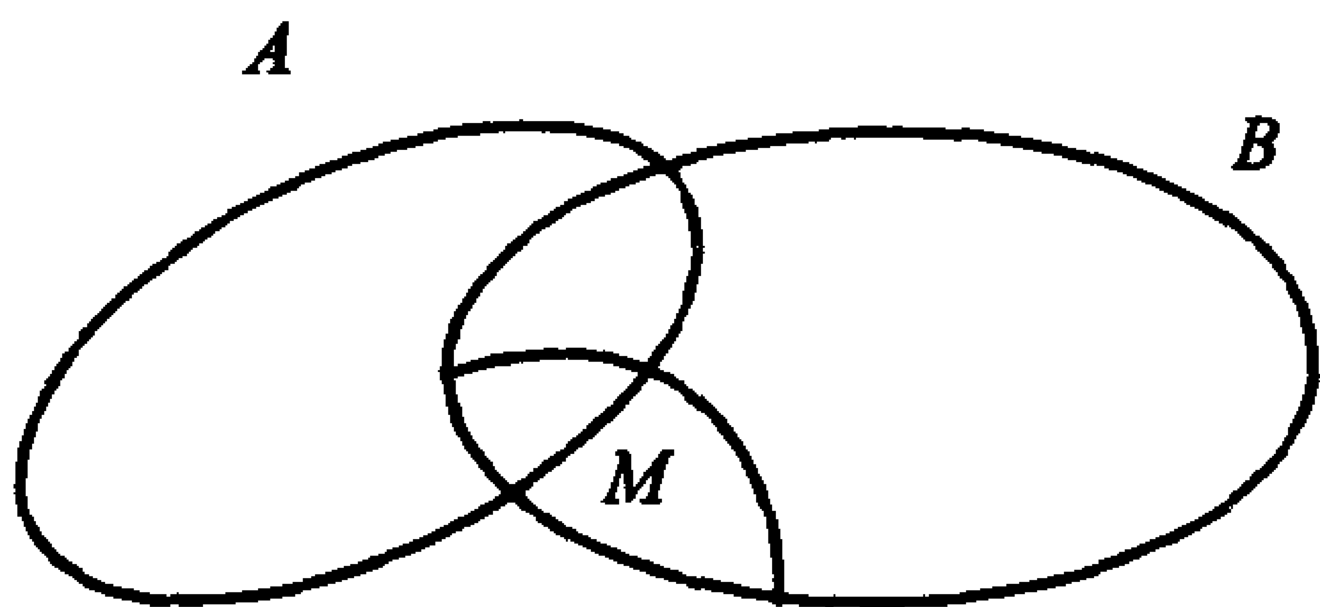


图 2

证明：由定理 6 可知，只要证(0,1]不可列。如果(0,1]可列，那么必可排成一个数列$\{t_n\}$，而每一个t_n又可以表示为一个十进位无限小数$0.t_{n_1}t_{n_2}\cdots$(如果t_n是一个有理数，就写成无限循环小数)。作一个十进位小数

$$a=0.a_1a_2a_3\cdots,$$

规定$a_i\neq 0, a_i\neq t_{ii}$，显然$a\in(0,1]$，因而必等于某个$t_n$。因为[0,1]中的数的十进制无限小数表示形式是唯一的，$a_n=t_{nn}$，矛盾。

定义 4　区间[0,1]的势称为连续点集的势，记为$\aleph$(读作阿列夫 aleph)或c。

推论 2　实数集$\boldsymbol{R}$的势是$\aleph$。

证明：定义$f(x)=2x, g(x)=x-1, h(x)=\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2}x$。易见

$$(0,1)\overset{f}{\sim}(0,2)\overset{g}{\sim}(-1,1)\overset{h}{\sim}(-\infty,\infty)。$$

而(0,1)与(0,1]对等，所以$\boldsymbol{R}$的势为$\aleph$。

定理 8　实数列全体R^{∞}的势为$\aleph$。

证明：令$B=\{\{x_n\}\in R^{\infty}:0<x_n<1\}$。在$B$上定义映射$\varphi$:

$$\varphi(x)=\{\mathrm{tg}(x_n-\frac{1}{2})\pi\}_1^{\infty}。$$

显然$\varphi: B\to R^{\infty}$是一个双射。因此$\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{R^{\infty}}}$。下面证明$\overline{\overline{B}}=\aleph$。令$B_0=\{\{x_n\}_1^{\infty}:x_n=x, x\in(0,1)\}$。易见$B_0\subset B$，且$\aleph=\overline{\overline{B_0}}\leqslant\overline{\overline{B}}$。另一方面，把

$x=\{x_n\}\in B$ 表示为十进制无限小数 $x_n=0.x_{n_1}x_{n_2}\cdots$，并定义映射

$$\varphi(x)=0.x_{11}x_{21}x_{12}x_{31}x_{22}x_{13}\cdots,$$

显然 $\varphi:B\to(0,1)$是一个单射。因此 B 与 $\varphi(B)(\subset(0,1))$对等，所以 $\overline{\overline{B}}\leqslant\aleph$。由定理 3 有 $\overline{\overline{B}}=\aleph$。

定理 9 $[a,b]$上连续函数的全体 $C[a,b]$的势是$\aleph$。

证明：令 $K=\{f\in C[a,b]:f(x)\equiv c,c\in \boldsymbol{R}\}$。易见 $\aleph=\overline{\overline{K}}\leqslant\overline{\overline{C[a,b]}}$。下面证明$\overline{\overline{C[a,b]}}\leqslant\aleph$。设$\{r_n\}_1^\infty$ 是$[a,b]$中的有理数全体，因为 $f\in C[a,b]$，所以 f 由数列$\{f(r_n)\}$完全决定。定义从 $C[a,b]$到 R^∞的映射 φ：

$$\varphi(f)=\{f(r_n)\}_1^\infty,$$

易见 φ 是一个单射。因此$\overline{\overline{C[a,b]}}\leqslant\overline{\overline{R^\infty}}=\aleph$。

定理 10 g 进位小数全体的势是$\aleph$。

证明：用 G 表示 g 进位小数的全体，可以把 G 分解为 $G=G_1\cup G_2$，其中 G_1 为 g 进位有限小数全体，G_2 为 g 进位无限小数全体。易见 G_1 为可列集，因此由定理 6 可知 $\overline{\overline{G}}=\overline{\overline{G_2}}$。定义从 G_2 到$(0,1]$的映射 f：

$$f(0.t_1t_2\cdots)=\Sigma_1^\infty\frac{t_n}{g^n}。$$

易见 f 是一个双射，因此 $G_2\sim(0,1]$，所以 $\overline{\overline{G}}=\aleph$。

定理 11

1)设 M 是由两个不同元素 p,q 生成的序列全体，那么 $\overline{\overline{M}}=\aleph$；

2)如果 Q 是可列集，那么$\overline{\overline{\mathscr{P}(Q)}}=\aleph$。

证明：1)设 $b=\{b_n\}\in M$，定义 $\varphi(b)=0.t_1t_2t_3\cdots$，其中 $t_n=1$，如果 $b_n=p$；$t_n=0$，如果 $b_n=q$。G 是二进位小数全体，易见 $\varphi:M\to G$ 是一个双射，因此 $\overline{\overline{M}}=\aleph$。

2)记 $Q=\{q_n\}_1^\infty$。对 $E\in\mathscr{P}(Q)$定义 $\varphi(E)=0.t_1t_2t_3\cdots$，其中 $t_n=1$，如果 $q_n\in E$；$t_n=0$，如果 $q_n\overline{\in}E$。令 G 是二进位小数全体，那么 $\varphi:\mathscr{P}(Q)\to G$ 是一个双射，因此$\overline{\overline{\mathscr{P}(Q)}}=\aleph$。

例 2 设 A、B 是两个集，如果 $\overline{\overline{A \cup B}} = \aleph$，那么 $\overline{\overline{A}} = \aleph$，或者 $\overline{\overline{B}} = \aleph$。

证明：因为 $\overline{\overline{A \cup B}} = \aleph$，所以有一个双射 $\varphi: A \cup B \to [0,1] \times [0,1]$（习题 B.1 指出 $[0,1] \times [0,1] \sim [0,1]$）。定义从 $[0,1] \times [0,1]$ 到 $[0,1]$ 上的投影映射 $P_X((x,y)) = (x,0)$，$P_Y((x,y)) = (0,y)$。如果 $\overline{\overline{A}} < \aleph$，$\overline{\overline{B}} < \aleph$，那么

$$\overline{\overline{P_X(\varphi(A))}} \leqslant \overline{\overline{\varphi(A)}} = \overline{\overline{A}} < \aleph;$$
$$\overline{\overline{P_Y(\varphi(B))}} \leqslant \overline{\overline{\varphi(B)}} = \overline{\overline{B}} < \aleph。$$

因此有 $x_0 \in [0,1] - P_X(\varphi(A))$，$y_0 \in [0,1] - P_Y(\varphi(B))$。因为 $(x_0, y_0) \in [0,1] \times [0,1]$，存在 $a \in A \cup B$ 使 $\varphi(a) = (x_0, y_0)$。不妨设 $a \in A$，那么 $x_0 = P_X(\varphi(a))$，得出矛盾。

习　题

A　类

1. 证明有限集绝不与其真子集对等。

2. 无限集必与它的一个真子集对等。

3. 定义一个从 $(0,1]$ 到 $[0,1]$ 的双射。

4. 证明可列集的任何子集，若不是有限集必是可列集。

5. 整系数多项式的实数根称为代数数，不是代数数的数称为超越数。证明代数数全体是可列集，超越数的全体的势为 $\aleph$。

6. 设 A 是直线上某些长度不为零的而且互不相交的区间所成的集，那么 A 是可列集或是有限集。

7. 证明任一可列集的所有有限子集全体是可列集。

8. 证明 g 进位有限小数全体是可列集，循环小数全体也是可列集。

9. 设 A 是平面上以有理点为圆心，有理数为半径的圆的全体，证明 A 是可列集。

10. 证明无理数全体的势是$\aleph$。

11. 证明$[a,b]$上一切实函数全体$R[a,b]$的势大于$\aleph$。

B 类

1. 证明$[0,1]\times[0,1]\sim[0,1]$。

2. 若A中每个元素由互相独立的可列个指标所决定，即$A=\{a_{x_1x_2x_3\cdots}\}$，而每个指标$x_i$在一个势为$\aleph$的集中变化，那么$\overline{\overline{A}}=\aleph$。

3. 设$\{x_n\}$为一序列，其中的元素彼此不同，那么它的子序列全体组成势为$\aleph$的集，如果$\{x_n\}$中只有有限项彼此不同，那么子序列全体的势如何？

4. 设A为$\boldsymbol{R}$中的可数点集，是否存在$\alpha\in\boldsymbol{R}$，使$(A+\alpha)\cap A=\varnothing$？

5. 记$A=\{f(x)=\dfrac{a_0+\cdots+a_nx^n}{b_0+\cdots+b_mx^m},a_i,b_j$为整数；$m,n$为自然数$\}$，是否存在$f\in A$使对任一有理数$r$，有整数$k$，使$f(k)=r$？

6. 证明$[a,b]$上右方连续的单调函数全体的势是$\aleph$，问$[a,b]$上单调函数全体的势是什么？

7. 如果$\bigcup_1^\infty A_n$的势是$\aleph$，证明必有一个A_n的势是$\aleph$。

8. 设$A\subset\boldsymbol{R}$具有下面的性质：对任何$x\in(-\infty,\infty)$，总存在包含x的某个区间$(x-\delta,x+\delta)$，使$(x-\delta,x+\delta)\cap A$最多只有可列个点，那么$A$必是有限集或可列集。

9. 证明去掉一点的球面与平面一一对应。

第四节　直线上的点集

本节我们将讨论直线$\boldsymbol{R}=(-\infty,\infty)$上的各种点集。它一方面为点集拓扑理论提供了一个模型，另一方面为第二章所讨论的可测结构作必要的准备。

定义1　设$x_0\in\boldsymbol{R}$，称包含x_0的任何一个开区间(α,β)为x_0的

一个领域，记为U_{x_0}。特别地，如果$\varepsilon>0$，称$(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$为$x_0$的一个$\varepsilon$-领域，记为$O(x_0,\varepsilon)$。设$A$为$\boldsymbol{R}$的一个非空子集，称$x_0$为$A$的极限点，如果对任意的$\varepsilon>0$，$(O(x_0,\varepsilon)-\{x_0\})\cap A\neq\varnothing$。记$A'=\{A$的极限点的全体$\}$，称为$A$的导集。如果$A\subset A'$，那么称$A$为自密集。$A-A'$中的点称为$A$的孤立点。如果$A'\subset A$，那么称$A$为闭集。记$\overline{A}=A\cup A'$，称为$A$的闭包。如果$A=A'$，那么称$A$为完全集。

由定义可知一个集的极限点未必属于这个集合，而一个集的孤立点必属于这个集合。自密集中的任一点都是该集合的极限点，闭集则包含了该集的任一极限点，而完全集既是自密集，又是闭集。根据定义不难验证任一集的闭包是闭集。

定理 1 下列断言是等价的：

1)x_0是A的极限点；

2)存在点列$\{x_n\}\subset A$使$x_n\neq x_0$，且$x_n\to x_0$；

3)在x_0的任一邻域U_{x_0}中有A的无穷多个点。

证明：1)$\Rightarrow$2)。对任一n有$x_n\in O(x_0,\frac{1}{n})-\{x_0\}$易见$x_n\neq x_0$，且$x_n\to x_0$。

2)$\Rightarrow$3)。对任意的ε_1，有$(O(x_0,\varepsilon_1)-\{x_0\})\cap A\neq\varnothing$，取$x_1$属于这个交，再令$\varepsilon_2\leqslant|x_1-x_0|$，又有$x_2\in(O(x_0,\varepsilon_2)-\{x_0\})\cap A$。如此继续下去得到不同点组成的点列$\{x_n\}\subset O(x_0,\varepsilon_1)$。

3)$\Rightarrow$1)。对任意的$\varepsilon>0$，$O(x_0,\varepsilon)$中含有A中无穷多个点，因此$(O(x_0,\varepsilon)-\{x_0\})\cap A\neq\varnothing$。

推论 1 x_0是A的孤立点当且仅当存在一个$\varepsilon>0$，使$O(x_0,\varepsilon)\cap A=\{x_0\}$。

例 1 设$A=\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$，那么$A'=\{0\}$，$A$不是自密集，也不是闭集。

例 2 设$A=\boldsymbol{Q}$，那么$A'=\boldsymbol{R}$，因此A为自密集，但非闭集。

例 3 有限个点或发散到无穷的点列组成的点集都没有极限点。事实上，对有限点集结论显然成立。假设$A=\{x_n\}_1^{\infty}$，$x_n\to+\infty$，那

么任一 x_{n_0} 都不是 $\{x_n\}$ 的极限点。因此有 $\varepsilon>0$,使 $O(x_{n_0},\varepsilon)\cap A=\{x_{n_0}\}$,所以 x_{n_0} 是 A 的孤立点。

定理 2　下面的论断是等价的:

1)A 是闭集;

2)$A=\overline{A}$;

3)A 中任意一个收敛列必收敛于 A 中的一点;

4)$x\overline{\in}A$ 的充要条件是存在一个 $\varepsilon>0$,使 $O(x,\varepsilon)\cap A=\varnothing$。

证明:1)⇒2),因为 $A'\subset A$,所以 $\overline{A}=A\cup A'=A$。

2)⇒3),设 $\{x_n\}\subset A$,$x_n\to x$。不妨设 $x_n\neq x$,那么 $x\in A'$,因此 $x\in A$。

3)⇒4),充分性显然,现证必要性。用反证法,设 $x\overline{\in}A$,并且不存在 4)中的 ε,那么对任一 n 有 $x_n\in(O(x,\frac{1}{n})-\{x\})\cap A$。易见 $\{x_n\}\subset A$,并且 $x_n\to x$,由 3)有 $x\in A$,矛盾。

4)⇒1)。4)表明如果 $x\overline{\in}A$,那么 $x\overline{\in}A'$,因此 $A'\subset A$,也即 A 为闭集。

定理 3

1)空集和全直线是闭集;

2)任意一族闭集的交是闭集;

3)有限个闭集的并是闭集。

证明:1)设 $A=\varnothing$,则 $A'=\varnothing$,因此 $A'\subset A$,从而空集是闭集。再设 $A=\boldsymbol{R}$,因为 A' 总是全直线的一个子集,因此 $A'\subset A$,从而全直线是闭集。

2)设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是一族闭集,$\{x_n\}\subset\bigcap F_\alpha$,并且 $x_n\to x$。要证 $x\in\bigcap F_\alpha$。因为 F_α 是闭集,而 $\{x_n\}\subset F_\alpha$,且 $x_n\to x$,因此 $x\in F_\alpha$ 对每一个 α 成立,从而 $x\in\bigcap F_\alpha$。

3)设 $A=\bigcup_{n=1}^{N}A_n$,A_n 是闭集,$x_n\in A$,$x_n\to x$,要证 $x\in A$。易见一定存在某个 A_{n_0},它包含 $\{x_n\}$ 中的无穷多项。把这无穷多项记为 $\{x'_n\}$,显然 $\{x'_n\}$ 是 $\{x_n\}$ 的一个子列,因此仍有 $x'_n\to x$。因为 A_{n_0} 是闭

集，所以 $x\in A_{n_0}$，从而 $x\in A$。

定义 2　集合 G 称为开集，如果存在闭集 F 使 $G=\boldsymbol{R}-F$。x_0 称为集 A 的内点，如果存在 $\varepsilon>0$，使 $O(x_0,\varepsilon)\subset A$。

定理 4　G 为开集的充要条件是 G 中每一点都是 G 的内点。

证明：必要性。设 G 为开集，那么存在闭集 F 使 $G=\boldsymbol{R}-F$。设 $x_0\in G$，要证 x_0 为 G 的内点。因为 $x_0\overline{\in}F$，由定理 2.4)存在 $\varepsilon>0$ 使 $O(x_0,\varepsilon)\cap F=\varnothing$，即 $O(x_0,\varepsilon)\subset G$。充分性。令 $F=\boldsymbol{R}-G$，要证 F 为闭集。设 $x_0\overline{\in}F$，那么 $x_0\in G$，因此有 $\varepsilon>0$ 使 $O(x_0,\varepsilon)\subset G$。也即 $O(x_0,\varepsilon)\cap F=\varnothing$。由定理 2.4)可知 F 为闭集，所以 G 为开集。

作为定理 3 的对偶有

定理 5

1)空集和全直线是开集；

2)有限个开集的交是开集；

3)任意一族开集的和是开集。

证明：我们仅证 3)，其余留给读者作为习题。我们用两种方法来证明。

法一：设 $G=\bigcup G_\alpha$，G_α 是开集。任取 $x\in G$，我们要证 x 为 G 的内点。因为 $x\in G$，所以 $x\in G_{\alpha_0}$对某个 α_0。因为 G_{α_0}是开集，所以有 $\varepsilon>0$ 使 $O(x,\varepsilon)\subset G_{\alpha_0}$，从而 $O(x,\varepsilon)\subset G$，也即 x 是 G 的内点。

法二：设 $G=\bigcup G_\alpha$，G_α 是开集，那么存在闭集 F_α 使 $G_\alpha=\boldsymbol{R}-F_\alpha$。因此 $G=\bigcup(\boldsymbol{R}-F_\alpha)=\boldsymbol{R}-\bigcap F_\alpha$。由定理 3.2)，$\bigcap F_\alpha$ 是闭集，从而 G 是开集。

下面我们来讨论开集的构造。

定义 3　设 G 是直线上的开集，如果开区间 $(\alpha,\beta)\subset G$，而 α,β 不属于 G，那么称 (α,β) 是 G 的一个构成区间。

注 1　由定义 3 可知构成区间必互不相交，否则一个构成区间的端点将成为另一个构成区间的内点，从而属于这个开集，矛盾。因此一个开集至多只有可列多个构成区间。如果 $G=\bigcup_1^m(\alpha_n,\beta_n)$ $(m\leqslant\infty)$，并且 (α_n,β_n) 互不相交，那么 (α_n,β_n) 必是 G 的构成区间。

定理 6　直线上任意一个非空开集均可表为至多可列多个互不相交的构成区间的并。

证明：我们只要证明 G 中任意一点都属于 G 的某一个构成区间。设 $x_0\in G$，定义

$$\alpha_0=\inf\{\alpha:存在\ \beta\ 使\ x_0\in(\alpha,\beta)\subset G\},$$

$$\beta_0=\sup\{\beta:存在\ \alpha\ 使\ x_0\in(\alpha,\beta)\subset G\}。$$

我们证明$(\alpha_0,x_0]\subset G$。否则可以假设有 $a\in(\alpha_0,x_0]-G$。由 α_0 的定义，有 $\alpha<a$ 以及 β 使 $x_0\in(\alpha,\beta)\subset G$。而 $a\in(\alpha,x_0]$，从而 $a\in G$，矛盾。同理可证$[x_0,\beta_0)\subset G$。因此$(\alpha_0,\beta_0)\subset G$。

最后证明 $\alpha_0,\beta_0\overline{\in}G$。假设 $\alpha_0\in G$，那么存在 $\delta>0$ 使$(\alpha_0-\delta,\alpha_0+\delta)\subset G$，因此$(\alpha_0-\delta,\beta_0)\subset G$，这与 α_0 的定义矛盾。同理可证 $\beta_0\overline{\in}G$。

定义 4　设 F 是直线上的闭集，称 F 的余集 $F^c=\boldsymbol{R}-F$ 的构成区间为 F 的余区间。

由定理 6 和定义 4 易得

定理 7　直线上的闭集 F 或者是全直线，或者是从直线上挖掉有限个或可列个互不相交的开区间（即 F 的余区间）所得到的集。

注 2　完全集是没有相邻接的余区间的闭集。事实上，如果有两个余区间相邻接，那么这两个余区间的公共端点就是这个闭集的孤立点，与完全集的定义矛盾。

定理 8　设 f 是从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的函数，那么下面的断言是等价的。

1）f 是连续函数；

2）对任一闭集 F，$f^{-1}(F)$是闭集；

3）对任一开集 G，$f^{-1}(G)$是开集。

证明，1）$\Rightarrow$2），设$\{x_n\}\subset f^{-1}(F)$，$x_n\to x_0$。那么$\{f(x_n)\}\subset F$，并且因为 f 是连续的，有 $f(x_n)\to f(x_0)$。因为 F 是闭的，所以$f(x_0)\in F$，因此 $x_0\in f^{-1}(F)$，从而 $f^{-1}(F)$是闭的。

2）$\Rightarrow$1）。假设不然，那么有 $x_0\in\boldsymbol{R}$，以及 $\{x_n\}\subset\boldsymbol{R}$，使 $x_n\to x_0$，而 $f(x_n)\not\to f(x_0)$。因此存在 $\varepsilon>0$，以及子数列$\{n_k\}$使$|f(x_{n_k})-f(x_0)|\geqslant\varepsilon$。令 $F=\boldsymbol{R}-(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)$，易见 F 是闭集，并且$\{x_{n_k}\}\subset$

$f^{-1}(F)$。因为 $x_{n_k}\to x_0$，并且 $f^{-1}(F)$ 是闭集，所以 $x_0\in f^{-1}(F)$，也即 $|f(x_0)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon$，矛盾。

2)$\Leftrightarrow$3)可由命题 1.6.2)推出。

定义 5　可列个闭集的和集称为 F_σ 集，可列个开集的交集称为 G_δ 集。

下面我们考察两个集 A、B 之间的关系。

定义 6　如果 $B\subset\overline{A}$，那么称 A 在 B 中稠密。如果 $\overline{A}=\boldsymbol{R}$，那么称 A 为稠密集。如果对任一开区间 (α,β) 都有 $(\alpha,\beta)\not\subset\overline{A}$，那么称 A 为疏朗集。

注 3　A 在 B 中稠，并不要求 $A\subset B$。例如设 A 为 $\boldsymbol{R}$ 中的有理数集，B 为 $\boldsymbol{R}$ 中的无理数集，那么 $A\cap B=\varnothing$，而 $\overline{A}=\overline{B}=\boldsymbol{R}$。由定义可知疏朗集不含任何开区间，而且下列断言等价：

1)A 为疏朗集，

2)对任一 (α,β) 有 $(\alpha,\beta)\cap(\overline{A})^c\neq\varnothing$，

3)对任一 (α,β) 有 $(\alpha',\beta')\subset(\alpha,\beta)$ 使 $(\alpha',\beta')\cap\overline{A}=\varnothing$。

事实上，1)$\Leftrightarrow$对任一 (α,β) 有 $(\alpha,\beta)\not\subset\overline{A}\Leftrightarrow$2)。3)$\Rightarrow$2)显然，故只要说明 2)$\Rightarrow$3)。由 2)有 $x\in(\alpha,\beta)\cap(\overline{A})^c$，由定理 2，有 $\varepsilon>0$ 使 $O(x,\varepsilon)\cap A=\varnothing$。取 ε 这样小使 $x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon\in(\alpha,\beta)$，令 $\alpha'=x_0-\varepsilon,\beta'=x_0+\varepsilon$，即得 3)。

由定义还可以知道疏朗完全集是这样的闭集，它的任意两个余区间都不相邻接，而且它们之间必有另一个余区间。事实上，由注 2 已经知道完全集没有相邻接的余区间。假设 (a,b)，(c,d) 是完全集 F 的两个余区间，$b<c$，如果 b,c 之间没有别的余区间，那么 $[b,c]\subset F$，矛盾。

下面我们将给出一个疏朗完全集的重要例子。

例 4 ·康托(Cantor)集。把区间 $[0,1]$ 三等分，去掉中间一个开区间 $I_1^{(1)}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，余下两个闭区间 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3},1\right]$。再把这两个区间三等分，并去掉中间的两个闭区间 $I_1^{(2)}=\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$，$I_2^{(2)}=$

$\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$。余下四个闭区间$\left[0,\frac{1}{9}\right],\left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right],\left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right],\left[\frac{8}{9},1\right]$。如此继续下去，第 n 次三等分时去掉的开区间（称为第 n 级区间）是

$$I_1^{(n)}=\left(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}\right),I_2^{(n)}=\left(\frac{7}{3^n},\frac{8}{3^n}\right),\cdots$$

$$I_{2^{n-1}}^{(n)}=\left(\frac{3^n-2}{3^n},\frac{3^n-1}{3^n}\right)。$$

记 $K=[0,1]-\bigcup I_i^{(n)}$，称为康托集。易见

1）康托集是完全疏朗集；

2）挖去区间的长度之和

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3^n}+\cdots\\&=\frac{1}{3}\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\cdots\right]\\&=1。\end{aligned}$$

3）$\overline{\overline{K}}=\aleph$。

事实上，如果把区间[0,1]用三进位小数表示的话，康托集的余区间中的点的表达式 $x=0.x_1x_2\cdots x_n\cdots$ 中必有某个 $x_i=1$，而余区间的端点必可用有限小数表示。令 B 是有限三进位小数全体，那么 B 是可列集，因此 $\overline{\overline{K}}=\overline{\overline{K-B}}$。易见 $K-B=\{x=0.x_1x_2\cdots\}$，其中 $x_i=0$ 或者 2，并且 x 是无限不循环小数。由定理 3.11.1）知道$\overline{\overline{K-B}}=\aleph$。

习　题

A　类

1. 设 E 是一个集合，把 E 中孤立点去掉后剩下的集是完全集吗？

2. 证明任意点集的导集是闭集。

3. 设 $A_1,\cdots,A_n$ 是有限个集，试证明 $(A_1\cup\cdots\cup A_n)'=A'_1\cup\cdots\cup A'_n$。

4. 证明直线上的孤立点集必是有限集或可列集。

5. 证明任意点集的内点全体成一开集。

6. 证明每个闭集必是可列个开集的通集，每个开集可以表示成可列个闭集的和集。

7. 证明直线上开集全体所成的集的势是$\aleph$。

8. 证明直线上闭集全体所成的势是$\aleph$，直线上完全集全体所成的势也是$\aleph$。

9. 证明$f(x)$在$[a,b]$上连续的充要条件是对任一实数c，集合$\{x\in[a,b]:f(x)\geqslant c\}$和$\{x\in[a,b]:f(x)\leqslant c\}$为$[a,b]$中的闭集。

10. 证明求闭包运算具有下面的性质：

1) $\overline{\varnothing}=\varnothing$，

2) $\overline{A}\supset A$，

3) $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$，

4) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

11. 证明$x\in\overline{A}$的充要条件是存在A中一个序列$\{x_n\}$，使$x_n\to x$。

12. 证明$\overline{A}$是包含A的最小闭集。

13. 设$\{O_n\}_1^\infty$是开集的序列，$[a,b]\subset\overline{O}_n$，试证$\overline{\bigcap_1^\infty O_n}\supset[a,b]$。

14. 把$[0,1]$中的数用十进位小数展开，有理小数规定展为有限小数，但以6为尾数的有限小数规定展为无限循环小数，证明$[0,1]$中其展开式中不用数字6的数全体是完全集。

15. 设$\{F_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$是一集族，如果任取有限个集$F_{\lambda_1},\cdots,F_{\lambda_m}$，总有$\bigcup_1^m F_{\lambda_i}\neq\varnothing$，那么称$\{F_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$是联族。证明：如果$\{F_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$是联族，并且每个$F_\lambda(\lambda\in\Lambda)$是有界闭集，那么$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\neq\varnothing$。

B 类

1. 记$A^{(1)}=A'$，$A^{(2)}=(A^{(1)})'$，$\cdots$，$A^{(n+1)}=(A^{(n)})'$。试构造一集A，使$A^{(n)}(n=1,2,\cdots)$互不相同。

2. 设$f(x)$是$[a,b]$上任一有限实函数，试证明它的第一类不连续点全体最多是可列集。

3. 定义：A,B 是直线上两个点集，如果 $A'\cap B\subset A$，那么称 A 是相对于 B 的闭集，如果对任何 $x\in A$，总有一个 x 的邻域 (α,β)，使得 $(\alpha,\beta)\cap B\subset A$，那么称 A 是相对于 B 的开集。证明：A 是相对于 B 的闭集（开集）当且仅当存在直线上的闭集 F（开集 G），使得 $A=B\cap F$（$B\cap G$）。

4. 设 $\langle a,b\rangle$ 是闭区间 $[a,b]$ 或开区间 (a,b)，f 是 $\langle a,b\rangle$ 上的有限实函数。证明当 f 在 $\langle a,b\rangle$ 上连续时，对任何实数 c，集 $\{x|x\in\langle a,b\rangle, f\geqslant c\}$ 是相对于 $\langle a,b\rangle$ 的闭集；集 $\{x|x\in\langle a,b\rangle, f>c\}$ 是相对于 $\langle a,b\rangle$ 的开集。

5. 定义：设 A 是直线上的点集，x 是直线上的一点，如果对任一 U_x，$U_x\cap A$ 为不可列无限点，那么称 x 是 A 的凝聚点。证明：

1）任何不可列无限点集 A 必有凝聚点，而且在 A 中必有一个点是 A 的凝聚点；

2）如果 x 是 A 的凝聚点，那么 x 是 A 的凝聚点的极限点；

3）直线上闭集的势除了有限、可列外必为$\aleph$。

6. 如果直线上集 A 的导集 A' 是有限集或可列集，那么 A 必是可列集。

7. 直线上孤立点集的势是什么？

8. 证明无理数全体不能表示成可列个闭集的和集。

9. 是否存在[0,1]上的如下函数，它在[0,1]的每一个有理点上是连续的，而在[0,1]的每个无理点是不连续的。

10. 设 $\{I_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 是直线上的一族开区间，如果 $\bigcap I_\lambda\neq\varnothing$，那么 $\bigcup I_\lambda$ 必是开区间。

11. 设 $\{B_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 是一族含有集，称它为集 M 的覆盖，如果对任一 $a\in M$，有某个 λ 使 a 是 B_λ 的内点。如果每个 B_λ 都是开集，那么称 $\{B_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 是 M 的开覆盖。

设 F 是直线上的闭集，$\{B_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$ 是 F 的一个覆盖。证明必存在有限个 $B_{\lambda_1},\cdots,B_{\lambda_n}$，使 $\{B_{\lambda_i},i=1,\cdots,n\}$ 成为 F 的覆盖。

12. (Lindelfi f, Young 定理)设 A 是直线上的一个集，$\{B_\lambda,\lambda\in$

$\Lambda\}$是 A 的一个覆盖。证明：必存在$\{B_\lambda,\lambda\in\Lambda\}$中至多可列个集$\{B_{\lambda_n},n=1,2,\cdots\}$，使$\{B_{\lambda_n}\}$成为 A 的覆盖。

第五节　历史注记

集合论的创建者康托(Cantor，1845—1918)出生于俄国的一个丹麦—犹太血统家庭，以后和他的父母一起迁到德国。1863 年进入柏林大学学习工科，在那里受了魏尔斯特拉斯(Weierstrass，1815—1897)的影响转到纯粹数学。1879 年成为大学教授。

当时三角级数和傅利叶(Fourier)级数是一个研究热点。与三角级数唯一性有关的问题也引起了康托的兴趣，他证明了如果对于一切 x，有一个收敛的三角级数表示零，那么系数 a_n 和 b_n 都是零。后来他在 1871 年的一篇论文中又证明了即使在有限个 x 值上不收敛，这个结论仍然成立。1872 年他又把唯一性的结果推广到允许例外值是无穷集的情形。1874 年他发表了关于无穷集合论的第一篇革命性论文，在这篇文章中，康托奠定了集合论的基础。

康托称集合为一些确定的、不同的东西的总体，人们能判断一个给定的东西是否属于这个总体。他认为一个集合如果能和它的一部分构成一一对应，它就是无穷的。他引入了集合的极限点、导集、第一型集、闭集、开集、完全集等概念，证明了开集的构造定理，定义了集合的并与交。他认为一一对应关系是基本的原则，两个能够一一对应的集合称为等价的，或具有相同的势(基数)。康托还引入了可列的概念，并且证明了有理数集是可列的，其势用$\aleph_0$表示。他证明了代数全体是可列的，而[0,1]是不可列的，其势用 c 表示。他还引入了基数与序数的理论。

集合论的难点集中在无穷集合这个概念本身。在整个中世纪，关于是否有实实在在无穷多个对象的集合这个问题，哲学家们看法不一。人们已经注意到这样的事实：把两个同心圆上的点用公共半径连起来，就构成两个圆周上的点之间的一一对应，但是一个圆周却比另

一个长。伽利略(Galilei，1564—1642)研究过无穷集合，但因为它的不可理喻而放弃了。高斯(Gauss，1777—1855)、柯西(Cauchy，1789—1857)都不承认无穷集合的存在。

康托的工作解决了不少久未解决的问题，并且推翻了许多前人的结论，自然很难被立即接受。他关于超限序数与基数的思想引起了当时的权威克朗涅克(Kroneckerr 1823—1891)的敌视，以致于后者粗暴地攻击他的思想达十年之久。庞加莱(Poincare，1854—1912)也不承认康托的工作。康托曾一度精神崩溃，但他在 1887 年又恢复了工作。

尽管如此，还是有许多卓越的数学家仍深为这新的理论已经起的作用所感动。1897 年第一次国际数学家大会在瑞士苏黎世召开，胡尔维茨(Hurwitz，1859—1919)与阿达玛(Hadamard，1865—1963)指出了超限数理论在分析中的应用。进一步的应用不久在测度论和拓扑学方面也开展起来。希尔伯特(Hilbert，1862—1943)在德国传播了康托的思想，他在 1926 年曾说过："没有人能把我们从康托为我们创造的乐园中开除出去。"他称康托的超限算术为"数学思想的最惊人的产物"，"在纯粹理论的范畴中人类活动的最惊人的表现之一"。罗素(Russell，1872—1970)称康托的工作"可能是这个时代所能夸耀的最伟大的工作"。

第二章 测 度

在数学分析中一个有界平面区域 G 的面积是这样定义的。设 $G\subset E=[a,b]\times[c,d]$，用矩形网把 E 分割成有限个矩形 $D_1,D_2,\cdots,D_n$，其全体记为 D，称为 G 的一个矩形分划。令 $I=\{i\in\{1,2,\cdots,n\},D_i\subset G\}$，$O=\{i\in\{1,2,\cdots,n\},D_i\cap G\neq\varnothing\}$，用 $|D_i|$ 表示矩形 D_i 的面积，记

$$S_I=\sup_D\{\Sigma_{i\in I}|D_i|\},$$

$$S_O=\inf_D\{\Sigma_{i\in O}|D_i|\},$$

分别称为 G 的内面积和外面积。如果 $S_I=S_O$，那么称 G 有面积 $S(=S_I=S_O)$。用这种方法来度量区间[0,1]中的有理点集 Q_0，我们不难发现 $S_I=0,S_O=1$，也就是说 Q_0 没有长度。因此这种分割的办法不能度量那些“不规则”的点集。本章的任务就是建立一种新的度量点集长度、面积、体积——统称为测度——的理论，使它既与数学分析中的面积一致，又能度量那些“不规则”的点集。

第一节 集类

为了讨论测度，首先要讨论作为测度定义域的集类。

设 X 是基本集，由 X 的某些子集生成的集类称为 X 上的集类。

定义 1 X 上的集类 $\mathscr{R}$ 称为一个环，如果对任何 $E,F\in\mathscr{R}$ 有

$$E\cup F\in\mathscr{R},E-F\in\mathscr{R}。$$

如果还有 $X\in\mathscr{R}$，那么称 $\mathscr{R}$ 为 X 上的代数。

由定义可知，环是对集的并、差运算封闭的集类，代数是对余运算也封闭的环。

例 1　设 X 是一个集，那么 $\mathscr{P}(X)$ 和 $\{\varnothing, X\}$ 都是 X 上的代数。

例 2　设 $\mathscr{P}$ 是直线上有限左开右闭区间的全体，$\mathscr{R}_0$ 是 $\mathscr{P}$ 中有限个元的并的全体，那么 $\mathscr{R}_0$ 是一个环。事实上，$\mathscr{R}_0$ 对并运算显然是封闭的。为了证明 $\mathscr{R}_0$ 对差运算封闭，假设有区间 $I_1=(a,b]$，$I_2=(c,d]$。显然我们只要考察下面四种情形：

1）$b\leqslant c$，此时 $I_1-I_2=I_1$；

2）$a\leqslant c\leqslant b\leqslant d$，此时 $I_1-I_2=(a,c]$；

3）$a\leqslant c<d\leqslant b$，此时 $I_1-I_2=(a,c]\cup(d,b]$；

4）$c\leqslant a<b\leqslant d$，此时 $I_1-I_2=\varnothing$。

可见不论哪种情形都有 $I_1-I_2\in\mathscr{R}$。如果去掉区间是有限的限制，那么 $\mathscr{R}_0$ 是一个代数。

例 3　在二维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^2$ 中，当 $a\leqslant b, c\leqslant d$ 时，称

$$E=\{(x,y): a<x\leqslant b, c<y\leqslant d\}$$

为 $\boldsymbol{R}^2$ 中的左下开右上闭矩形。由有限个左下开右上闭矩形的并的全体所成的集类 $\mathscr{R}_0^2$ 是一个环。

注 1　如果 $\mathscr{R}_\alpha(\alpha\in A)$ 是 X 上的环（代数），那么 $\bigcap_{\alpha\in A}\mathscr{R}_\alpha$ 也是一个环（代数）。

下面我们讨论如何由一个集类来生成一个环（代数）。

定理 1　设 $\mathscr{E}$ 是 X 上的一个集类，那么一定有一个包含 $\mathscr{E}$ 的最小环（代数）$\mathscr{R}$，即有环（代数）$\mathscr{R}$ 满足

1）$\mathscr{E}\subset\mathscr{R}$；

2）对任何包含 $\mathscr{E}$ 的环（代数）$\mathscr{R}'$ 都有 $\mathscr{R}\subset\mathscr{R}'$。

证明：用构造辅助集类的办法，定义

$$\mathscr{M}=\{\mathscr{R}': \mathscr{E}\subset\mathscr{R}'\subset\mathscr{P}(X), \mathscr{R}' \text{是环（代数）}\}。$$

由例 2 可知 $\mathscr{M}$ 非空。令 $\mathscr{R}=\bigcap_{\mathscr{R}'\in\mathscr{M}}\mathscr{R}'$，由注 5 可知 $\mathscr{R}'$ 是一个环，并且满足条件 1）和 2）。

定义 2　定理 1 中的环（代数）称为由集类 $\mathscr{E}$ 生成的环（代数），记为 $\mathscr{R}(\mathscr{E})$（$\mathscr{A}(\mathscr{E})$）。

例 4　用 $\mathscr{P}$ 表示 $\boldsymbol{R}$ 上有限左开右闭区间的全体，那么 $\mathscr{R}(\mathscr{P})$ 就

是例 2 中的 $\mathscr{R}_0$。

不难看出环只是对有限并运算封闭的集类，它还不够广泛，为此我们引入

定义 3 设 $\mathscr{S}$ 是 X 上的环，如果对任何一列 $\{E_n\}\subset\mathscr{S}$ 都有

$$\bigcup E_n\in\mathscr{S}$$

那么称 $\mathscr{S}$ 是 X 上的一个 σ-环。如果还有 $X\in\mathscr{S}$，那么称 $\mathscr{S}$ 为 X 上的 σ-代数。

由定义可知σ-环是对差和可列并运算封闭的集类，而σ-代数则是对余运算也封闭的σ-环。

易见例 1 是σ-代数，而例 2 不是σ-环。

定理 2 设 $\mathscr{E}$ 是一个集类，那么必定有一个包含 $\mathscr{E}$ 的最小σ-环(代数)，称为 $\mathscr{E}$ 生成的σ-环(代数)。

证明与定理 1 类似，只要把辅助集 $\mathscr{M}$ 定义中的 $\mathscr{R}'$ 改为 σ-环，或 σ-代数就行了。

由 $\mathscr{E}$ 生成的 σ-(σ-代数)常记为 $\mathscr{S}(\mathscr{E})$($\mathscr{A}(\mathscr{E})$)。

推论 1 设 $\mathscr{E}$ 是一个集类，那么 $\mathscr{S}(\mathscr{E})=\mathscr{S}(\mathscr{R}(\mathscr{E}))$。

证明：因为 $\mathscr{S}(\mathscr{E})\supset\mathscr{E}$，所以 $\mathscr{S}(\mathscr{E})\supset\mathscr{R}(\mathscr{E})$，从而 $\mathscr{S}(\mathscr{E})\supset\mathscr{S}(\mathscr{R}(\mathscr{E}))$。反过来，由 $\mathscr{E}\subset\mathscr{R}(\mathscr{E})$ 可得 $\mathscr{S}(\mathscr{E})\subset\mathscr{S}(\mathscr{R}(\mathscr{E}))$。

推论 1 表明从一个集类 $\mathscr{E}$ 直接生成 σ-环与先生成环，再由环生成 σ-环是一样的。

命题 1 设 $\mathscr{E}$ 是 X 上的一个集类，那么 $\mathscr{S}(\mathscr{E})\subset\{E\subset X$：存在 $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathscr{E}$ 使 $E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\}$。

证明：令 $\mathscr{M}=\{E\subset X$：存在 $\{E_i\}\subset\mathscr{E}$ 使 $E\subset\bigcup_1^{\infty}E_i\}$。易见 $\mathscr{M}\supset\mathscr{E}$ 并且 $\mathscr{M}$ 是一个σ-环，因此 $\mathscr{S}(\mathscr{M})\subset\mathscr{M}$。

定理 2 只指出存在包含 $\mathscr{E}$ 的最小 σ-环，但从 $\mathscr{E}$ 到 $\mathscr{S}(\mathscr{E})$ 的过程是很复杂的。例如要对任意的集列 $\{E_n\}\subset\mathscr{E}$ 构造 $\bigcup E_n$ 和 $\bigcap E_n$，然后再用这些元组成的集列构造新的可列和、可列交等等。那么是否可以取某些特殊类型的集列来构造可列和与可列交呢？注 Ⅰ.1.2 表明这是可能的。

定义 4 X 上的集类 $\mathscr{M}$ 称为单调类，如果对 $\mathscr{M}$ 中任何单调列 $\{E_n\}$ 都有 $\lim E_n \in \mathscr{M}$。

例 5 $\mathscr{P}(X)$，$\{\varnothing, X\}$ 是单调类，而左开右闭区间全体所成的类不是单调类。

注 2

1）任意多个单调类的交仍是单调类；

2）对任意一个集类 $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$ 一定有包含 $\mathscr{E}$ 的最小单调类，称为 $\mathscr{E}$ 生成的单调类，记为 $\mathscr{M}(\mathscr{E})$；

3）σ-环一定是单调类；

4）单调环一定是σ-环，但是一般的单调类未必是环。例如 $\mathscr{M} = \{(0,1],[2,3]\}$ 是单调类，但是 $\mathscr{M}$ 对并运算不封闭。

定理 3 如果 $\mathscr{R}$ 是一个环，那么 $\mathscr{S}(\mathscr{R}) = \mathscr{M}(\mathscr{R})$。

证明：因为 $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ 是包含 $\mathscr{R}$ 的最小 σ-环，必是单调类，因此 $\mathscr{S}(\mathscr{R}) \supset \mathscr{M}(\mathscr{R})$。

现在证明 $\mathscr{S}(\mathscr{R}) \subset \mathscr{M}(\mathscr{R})$。由注 2.4）只要证明 $\mathscr{M}(\mathscr{R})$ 是一个环，也即证明如果 $E, F \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$，那么 $E \cup F, E-F \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$。

我们先证明一个较弱的结论：如果 $E \in \mathscr{R}, F \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$，那么 $E \cup F, E-F \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$。设 X 是基本集，对 $E \subset X$ 定义辅助集类

$$\mathscr{R}(E) = \{F \in \mathscr{M}(\mathscr{R}) : E-F, F-E, E \cup F \in \mathscr{M}(\mathscr{R})\},$$

易见 $\mathscr{R}(E) \subset \mathscr{M}(\mathscr{R})$。进一步，$\mathscr{R}(E)$ 是一个单调类。事实上，设 $\{F_n\} \subset \mathscr{R}(E)$ 单调，那么对任一 n，$E-F_n \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$ 单调，因此 $\lim(E-F_n) = E - \lim F_n \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$。类似地可证 $\lim F_n - E, E \cup \lim F_n \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$。按 $\mathscr{R}(E)$ 的定义有 $\lim F_n \in \mathscr{R}(E)$，也即 $\mathscr{R}(E)$ 是单调类。当 $E \in \mathscr{R}$ 时，$\mathscr{R} \subset \mathscr{R}(E)$，因而 $\mathscr{M}(\mathscr{R}) \subset \mathscr{R}(E)$，所以 $\mathscr{R}(E) = \mathscr{M}(\mathscr{R})$。这表明当 $E \in \mathscr{R}$，对任一 $F \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$，$E \cup F, E-F, F-E \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$。交换 E, F 的位置，可知当 $E \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$ 时，对任一 $F \in \mathscr{R}$ 有 $E \cup F, E-F, F-E \in \mathscr{M}(\mathscr{R})$，从而 $\mathscr{R} \subset \mathscr{R}(E)$。因为 $\mathscr{R}(E)$ 是单调类，有 $\mathscr{M}(\mathscr{R}) \subset \mathscr{R}(E)$，从而 $\mathscr{M}(\mathscr{R}) = \mathscr{R}(E)$，即 $\mathscr{M}(\mathscr{R})$ 是环。

推论 2 如果 $\mathscr{M}$ 是一个单调类，$\mathscr{R}$ 是一个环，并且 $\mathscr{M} \supset \mathscr{R}$，那

么 $\mathscr{M}\supset\mathscr{S}(\mathscr{R})$。

证明：因为 $\mathscr{M}\supset\mathscr{M}(\mathscr{R})=\mathscr{S}(\mathscr{R})$。

最后我们引入一类特殊的基本集。

定义 5 设 X 是基本集，$\mathscr{R}$ 是 X 上的一个 σ-环，并且

$$X=\bigcup_{E\in\mathscr{R}}E,$$

那么称 $(X,\mathscr{R})$ 是一个可测空间，称 $\mathscr{R}$ 中的元为 $(X,\mathscr{R})$ 上的可测集，简称为可测集。

习　题

A 类

1. 设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的一个集类，证明 $\mathscr{R}$ 是环的充要条件是下面两个条件之一成立：

1) $\mathscr{R}$ 对任意有限个互不相交集的并运算和差运算封闭；

2) $\mathscr{R}$ 对运算"Δ"、"$\cap$"，"$-$"封闭。

2. 设 $\mathscr{R}$ 是一个集类，证明 $\mathscr{R}$ 是代数的充要条件是对"$\cup$"、"$\cap$"、"余"运算封闭。

3. 设 $\mathscr{R}$ 是一个 σ-环，证明：

1) $\{E\subset X:E\in\mathscr{R}$ 或者 $E^c\in\mathscr{R}\}$ 是一个 σ-代数；

2) $\{E\subset X:E\cap F\in\mathscr{R}$ 对所有的 $F\in\mathscr{R}\}$ 是一个 σ-代数。

4. 设 $\mathscr{E}$ 是 X 的集类，求下列情形的环 $\mathscr{R}(\mathscr{E})$：

1) $\mathscr{E}=\{E_1,\cdots,E_n\}$；

2) X 是数直线，$\mathscr{E}$ 是 X 中开区间全体；

3) X 是数直线，$\mathscr{E}$ 是形如 $(-\infty,a)$ 的开区间全体。

5. 求出题 4 各种情形的代数 $\mathscr{A}(\mathscr{E})$。

6. 证明直线上的开集、闭集、有理点全体、无理点全体均属于 $\mathscr{S}(\mathscr{R}_0)$。

7. 设 $\mathscr{Y}$ 是直线上开区间全体所成的类，证明 $\mathscr{R}_0$ 与 $\mathscr{Y}$ 张成的 σ-环是一致的。

8. 定义：设$\{f_\lambda(x):\lambda\in\Lambda\}$是定义在集$X$上的一族实有限函数，对任何实数$c$，令$E_{\lambda c}=\{x:c<f_\lambda(x)\}$，由类$\mathscr{E}=\{E_{\lambda c}\}$张成的$X$上的$\sigma$-代数称为由函数族$\{f_\lambda(x):\lambda\in\Lambda\}$生成的$\sigma$-代数。

当$X=\boldsymbol{R}$时，

1)求由一个函数$\mathrm{sign}x$产生的σ-代数，

2)求由$E(x)$(不超过x的最大整数函数)生成的σ-代数，

3)求证由$f(x)=x^3$生成的σ-代数是$\mathscr{S}(\mathscr{R}_0)$，

4)记$\mathscr{R}_0[a,b)$是$[a,b)$中所有左闭右开区间全体所生成的环，$\{x\}$是x的正小数部分函数，求出由$\{x\}$生成的σ_代数与$\mathscr{R}_0[0,1)$的关系；

5)$\{f_\lambda(x):\lambda\in\Lambda\}$是直线上周期为$2\pi$的连续函数全体，求出由$\{f_\lambda(x):\lambda\in\Lambda\}$生成的$\sigma$-代数与$\mathscr{R}_0(0,2\pi]$的关系($\mathscr{R}_0(0,2\pi]$是$(0,2\pi]$中左开右闭区间全体所生成的环)。

9. 证明定理2。

B 类

1. 设$\mathscr{R}$是X上的一个环，A是X的一个子集，证明$\mathscr{S}(\mathscr{R})\cap A=\mathscr{S}(\mathscr{R}\cap A)$，当$\mathscr{R}$是代数或$A\in\mathscr{R}$时$\mathscr{S}(\mathscr{R})\cap A$是$A$上的$\sigma$-代数。

2. 设$\mathscr{R}$，$\mathscr{M}$都是X上的环，并且1)$\mathscr{M}\supset\mathscr{R}$，2)当$\{E_i\}_1^\infty$是$\mathscr{M}$中一列互不相交的集时，$\bigcup_1^\infty E_i\in\mathscr{M}$，证明$\mathscr{M}\supset\mathscr{S}(\mathscr{R})$。

3. 设$\mathscr{R}$是$\boldsymbol{R}$上的一个环，定义$\tilde{\mathscr{R}}=\{\tilde{E}=\{(x,y):x\in E\}:E\in\mathscr{R},y\in\boldsymbol{R}\}$，求出$\mathscr{S}(\overline{\mathscr{R}})$与$\mathscr{S}(\mathscr{R})$的关系。

4. 设$\mathscr{M}$是一个有无限个元的σ-代数，证明$\overline{\overline{\mathscr{M}}}\geqslant c$。

5. 设$\mathscr{M}$是由$\mathscr{E}$生成的σ-代数，那么$\mathscr{M}$是$\mathscr{F}$生成的σ-代数的和，其中$\mathscr{F}$取遍$\mathscr{E}$的所有可数子集。

第二节　环上的测度

本节我们讨论环上的测度。

定义 1　设 X 是基本集，$\mathscr{R}$ 是 X 上的一个环，函数 $\mu:\mathscr{R}\to[0,\infty]$称为 $\mathscr{R}$ 上的测度，如果

1)$\mu(\varnothing)=0$，

2)(可列可加性)如果$\{E_n\}_1^\infty$ 是 $\mathscr{R}$ 中互不相交集的序列，并且 $\bigcup E_n\in R$，那么 $\mu(\bigcup_1^\infty E_n)=\Sigma_1^\infty\mu(E_n)$。

性质 2)蕴含

2′)(有限可加性)如果 $E_1,\cdots,E_n$ 是 $\mathscr{R}$ 中互不相交的集，那么 $\mu(\bigcup_1^n E_i)=\Sigma_1^n\mu(E_i)$。

满足 1)，2′)的函数 μ 称为有限可加测度。

下面是一些测度的例子。

例 1　设 X 是基本集，$\mathscr{R}=\mathscr{P}(X)$。对 $E\in\mathscr{R}$，定义 $\mu(E)=E$ 中元素的个数，那么 μ 是一个测度，称为计数测度。

例 2　设 $X,\mathscr{R}$ 同例 2，$x_0\in X_0$ 对 $E\in\mathscr{R}$，定义 $\mu(E)=1$，如果 $x_0\in E$；$\mu(E)=0$，如果 $x_0\overline{\in}E$。不难证明 μ 是一个测度，称为狄拉克(*Dirac*)测度。

例 3　设 $X,\mathscr{R}$ 同例 2，定义 $\mu(E)=0$，如果 E 是有限集；$\mu(E)=\infty$，如果 E 是无限集。易见 μ 是一个有限可加测度，但不是测度。

定理 1　环 $\mathscr{R}$ 上的测度 μ 具有以下性质：

1)(单调性)如果 $E,F\in\mathscr{R},E\subset F$，那么 $\mu(E)\leqslant\mu(F)$；

2)(可减性)如果 $E,F\in\mathscr{R},E\subset F,\mu(E)<\infty$，那么 $\mu(F-E)=\mu(F)-\mu(E)$；

3)(次可列可加性)如果$\{E_n\}_1^\infty\subset\mathscr{R},E\in\mathscr{R},E\subset\bigcup E_n$，那么$\mu(E)\leqslant\Sigma_1^\infty\mu(E_n)$；

4)(下连续性)如果$\{E_n\}_1^\infty\subset\mathscr{R}$，是单调增序列，$\bigcup E_n\in\mathscr{R}$，那么 $\Sigma_1^\infty\mu(E_n)=\lim\mu(E_n)$；

5)（上连续性）如果$\{E_n\}_1^\infty\subset\mathscr{R}$是单调降序列，$\bigcap E_n\in\mathscr{R}$，并且对某个$j$有$\mu(E_j)<\infty$，那么$\mu(\bigcap_1^\infty E_n)=\lim\mu(E_n)$。

证明：1）因为$E\subset F$，所以$F=E\bigcup(F-E)$，从而$\mu(F)=\mu(E)+\mu(F-E)\geqslant\mu(E)$。

2）如果$\mu(E)<\infty$，那么由1）的证明可得出$\mu(F-E)=\mu(F)-\mu(E)$。

3）令$G_1=E\bigcap E_1,G_k=(E-\bigcup_1^{k-1}E_j)\bigcap E_k(k>1)$。易见$\{G_k\}$是$\mathscr{R}$中互不相交集列，且$E=\bigcup G_j$，由可列可加性和单调性有

$$\mu(E)=\mu(\bigcup G_j)=\Sigma\mu(G_j)\leqslant\Sigma\mu(E_j)。$$

4）设$E_0=\varnothing$，由可列可加性有

$$\begin{aligned}\mu(\bigcup_1^\infty E_j)&=\mu(\bigcup_1^\infty(E_j-E_{j-1}))=\Sigma_1^\infty\mu(E_j-E_{j-1})\\&=\lim\Sigma_1^n\mu(E_j-E_{j-1})=\lim\Sigma_1^n(\mu(E_j)-\mu(E_{j-1}))\\&=\lim\mu(E_j)。\end{aligned}$$

5）设$\mu(E_j)<\infty$。对$n>j$，令$F_n=E_j-E_n$。易见$F_{j+1}\subset F_{j+2}\subset\cdots$，$\bigcup_{n+1}^\infty F_j=E_j-\bigcap_1^\infty E_n$，并且$\mu(E_j)=\mu(F_n)+\mu(E_n)$。利用4）有

$$\begin{aligned}\mu(E_j)&=\mu(\bigcap_1^\infty E_n)+\mu(\bigcup_{n+1}^\infty F_j)\\&=\mu(\bigcap_1^\infty E_n)+\lim\mu(F_n)\\&=\mu(\bigcap_1^\infty E_n)+\mu(E_j)-\lim\mu(E_n)。\end{aligned}$$

因为$\mu(E_j)<\infty$，所以$\mu(\bigcap_1^\infty E_n)=\lim\mu(E_n)$。

注1 定理1.5）中的条件$\mu(E_j)<\infty$对某个j成立是不可缺少的。例如令$E_n=(n_1,n+1,\cdots)$，易见$\{E_n\}_1^\infty$单调降。令μ为计数测度，那么$\lim\mu(E_n)=+\infty$，但是$\bigcap_1^\infty E_n=\varnothing$，从而$\mu(\bigcap_1^\infty E_n)=0$。

这个例子也说明2）中的条件$\mu(E)<\infty$也是不可少的。

设μ是环$\mathscr{R}$上的测度，集$E\in\mathscr{R}$称为零测集，如果$\mu(E)=0$。如果$\mu(E)=0,F\subset E$，且$F\in\mathscr{R}$，那么由单调性有$\mu(F)=0$。但是，一般来说零测集的子集未必属于$\mathscr{R}$。例如考虑σ-代数$\{\varnothing,X\}$上的零测度。为了克服上述困难，我们引入

定义2 环$\mathscr{R}$上的测度μ称为完全测度，如果零测集的任一子集都属于$\mathscr{R}$。

正如下面的定理 2 所表明的，要使环 $\mathscr{R}$ 上的测度成为完全测度，关键在于扩大 $\mathscr{R}$ 的内涵。

定理 2 设 μ 是 σ-代数 $\mathscr{A}$ 上的测度，令 $\mathscr{N}=\{N\in\mathscr{A}:\mu(N)=0\}$，$\overline{\mathscr{A}}=\{E\cup F:E\in\mathscr{A},F\subset N$ 对某个 $N\in\mathscr{N}\}$，那么 $\overline{\mathscr{A}}$ 是一个 σ-代数，μ 可以唯一地延拓为 $\overline{\mathscr{A}}$ 上的完全测度。

证明：先证 $\overline{\mathscr{A}}$ 是一个 σ-代数。因为 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{N}$ 对可列并运算封闭，所以 $\overline{\mathscr{A}}$ 也对可列并运算封闭。下面证 $\overline{\mathscr{A}}$ 对余运算封闭。设 $E\cup F\in\overline{\mathscr{A}}$，这里 $F\subset N\in\mathscr{N}$ 对某个 N 成立。不失一般性，可以假设 $E\cap N=\varnothing$（否则用 $F-E,N-E$ 代替 F,N）。这样 $E\cup F=(E\cup N)\cap(N^c\cup F)$，因此 $(E\cup F)^c=(E\cup N)^c\cup(N-F)$。易见 $(E\cup N)^c\in\mathscr{A}$，$N-F\subset N$，因此 $(E\cup F)^c\in\overline{\mathscr{A}}$。

对 $E\cup F\in\overline{\mathscr{A}}$（其中 $F\subset N$ 对某个 $N\in\mathscr{N}$ 成立），定义 $\overline{\mu}(E\cup F)=\mu(E)$。先证这个定义是一意的。假设 $E_1\cup F_1=E_2\cup F_2$，其中 $F_i\subset N_i\in\mathscr{N}$，那么 $E_1\subset E_2\cup N_2$，因此 $\mu(E_1)\leqslant\mu(E_2)+\mu(N_2)=\mu(E_2)$。类似地有 $\mu(E_2)\leqslant\mu(E_1)$，因此 $\mu(E_1)=\mu(E_2)$。

再证 $\overline{\mu}$ 是一个测度，易见 $\overline{\mu}:\overline{\mathscr{A}}\to[0,\infty]$，$\overline{\mu}(\varnothing)=0$。为证可列可加性，设 $\{E_i\cup F_i\}_1^\infty$ 是 $\overline{\mathscr{A}}$ 中互不相交集的序列，$F_i\subset N_i\in\mathscr{N}$，那么 $\bigcup_1^\infty(E_i\cup F_i)=(\bigcup_1^\infty E_i)\cup(\bigcup_1^\infty F_i)$，且 E_i 互不相交，$\bigcup_1^\infty F_i\subset\bigcup_1^\infty N_i\in\mathscr{N}$。因此 $\overline{\mu}(\bigcup_1^\infty(E_i\cup F_i))=\mu(\bigcup_1^\infty E_i)=\Sigma\mu(E_i)=\Sigma\,\overline{\mu}(E_i\cup F_i)$。$\overline{\mu}$ 的完全性是一目了然的。

最后证明延拓的唯一性。设 $\overline{\gamma}$ 是 μ 在 $\overline{\mathscr{A}}$ 上的另一个延拓。对 $E\cup F\in\overline{\mathscr{A}}$，这里 $F\subset N$ 对某个 $N\in\mathscr{N}$，有 $\mu(E)=\overline{\gamma}(E)\leqslant\overline{\gamma}(E\cup F)\leqslant\overline{\gamma}(E\cup F)\leqslant\overline{\gamma}(E)+\overline{\gamma}(N)=\mu(E)$，所以 $\overline{\gamma}(E\cup F)=\mu(E)=\overline{\mu}(E\cup F)$。

测度 $\overline{\mu}$ 称为 μ 的完备化，$\overline{\mathscr{A}}$ 称为 $\mathscr{A}$ 关于 μ 的完备化。

定义 3 设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的环，μ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度。如果 $E\in\mathscr{R}$，$\mu(E)<\infty$，那么称 E 有有限测度。如果任一 $E\in\mathscr{R}$ 都有有限测度，那么称 μ 是有限测度。如果 $X\in\mathscr{R}$，且 $\mu(X)<\infty$，那么称 μ 是全有限的。如果 $E\in\mathscr{R}$，并且有一列 $\{E_i\}_1^\infty\subset\mathscr{R}$，使 $E\subset\bigcup_1^\infty E_i$，$\mu(E_i)<\infty$，那

么称 E 有 σ-有限测度。如果每个 $E\in\mathscr{R}$ 都有 σ-有限测度，那么称 μ 是 σ-有限的。如果 $X\in\mathscr{R}$，并且 X 有 σ-有限测度，那么称 μ 是全 σ-有限测度。

定义 4 设 $(X,\mathscr{R})$ 是一个可测空间，μ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度，那么称 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 是一个测度空间。

习 题

A 类

1. 设 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度，$a_1,\cdots,a_n\in[0,+\infty)$，那么 $\sum_1^n a_i\mu_i$ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度。

2. 设 μ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度，$\{E_j\}\subset\mathscr{R}$，那么 $\mu(\underline{\lim}E_j)\leqslant\underline{\lim}\mu(E_j)$，如果 $\mu(\bigcup_1^\infty E_j)<\infty$，那么 $\mu(\overline{\lim}E_j)\geqslant\overline{\lim}\mu(E_j)$。

3. 设 μ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度，$E,F\in\mathscr{R}$，那么 $\mu(E)+\mu(F)=\mu(E\cup F)+\mu(E\cap F)$。

4. 设 μ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度，$E\in\mathscr{R}$，定义 $\mu_E(A)=\mu(A\cap E)$，$\forall A\in\mathscr{R}$，那么 μ_E 也是 $\mathscr{R}$ 上的测度。

5. 设 $\{\mu_n\}$ 是环 $\mathscr{R}$ 上一列测度，并且对一切 $E\in\mathscr{R}$，以及任何自然数 n，都有 $\mu_n(E)\leqslant 1$，证明

$$\mu(E)=\sum_1^\infty\frac{1}{2^n}\mu_n(E)\quad(E\in\mathscr{R})$$

也是 $\mathscr{R}$ 上的测度，并且满足 $\mu(E)\leqslant 1\quad(E\in\mathscr{R})$。

去掉条件 $\mu_n(E)\leqslant 1$，证明 $\mu(E)$ 仍是 $\mathscr{R}$ 上的测度。

6. 设 μ 是环 $\mathscr{R}$ 上的测度，如果对一切 $E\in\mathscr{R}$，$\mu(E)\leqslant 1$，证明 μ 的原子全体至多是可列集(这里“原子”是指 $\mathscr{R}$ 中的一种单点集 $\{x\}$，$\mu(\{x\})>0$)。

7. 设 $\{\mu_n\}_1^\infty$ 是环 $\mathscr{R}$ 上的一列测度，并且对任何 $E\in\mathscr{R}$，极限 $\lim\mu_n(E)$ 存在，记为 $\mu(E)$。证明 μ 是 $\mathscr{R}$ 上非负，空集上取值为 0 的有限可加集函数，并举例说明 μ 未必是 $\mathscr{R}$ 上测度。

B 类

1. 设 $g(x)$ 是 R 上单调增加，右连续函数，当 $(\alpha,\beta]\in\mathscr{P}$ 时定义

$$g((\alpha,\beta])=g(\beta)-g(\alpha)。$$

证明这个集函数 g 可以唯一地延拓成 $\mathscr{R}_0$ 上的测度，$\mathscr{P}$、$\mathscr{R}_0$ 的定义同例 1.2。

2. 设 $\mathscr{T}'$ 是直线上开区间的全体，作 $\mathscr{T}'$ 上的集函数 m' 如下：$m'(\alpha,\beta)=\beta-\alpha$，证明 m' 必可唯一地延拓成 $\mathscr{R}(\mathscr{T}')$ 上的测度。

3. 设 $\mathscr{T}$ 是平面上左下开右上闭的矩形 $(a,b]\times(c,d]=\{(x,y):a<x\leqslant b,c<y\leqslant d\}$ 全体，作 $\mathscr{T}$ 上的集函数 m 如下：

$$m((a,b]\times(c,d])=(b-a)(d-c),$$

证明 m 必可唯一地延拓成 $\mathscr{R}(\mathscr{T})$ 上的测度。

4. 设 $\mathscr{R}_n(n=1,2,\cdots)$ 是集 X 上的一列环，并且 $\mathscr{R}_1\subset\mathscr{R}_2\subset\cdots$。又设 μ_n 是 $\mathscr{R}_n$ 上的测度，并且对任何 $E\in\mathscr{R}_n$，当 $m\geqslant n$ 时，$\mu_m(E)=\mu_n(E)$（通常称为 $\{\mu_n\}$ 在 $\{\mathscr{R}_n\}$ 上是符合的）。证明

1）$\mathscr{R}=\bigcup_1^\infty\mathscr{R}_n$ 是 X 上的环；

2）定义 $\mathscr{R}$ 上函数 μ：对每个 $E\in\mathscr{R}$，有某个 n，使 $E\in\mathscr{R}_n$，规定 $\mu(E)=\mu_n(E)$。证明 μ 是 $\mathscr{R}$ 上非负，空集上取值为零的有限可加集函数（μ 未必是 $\mathscr{R}$ 上测度）。

5. 证明：有限可加测度 μ 是测度的充要条件是 μ 有下连续性；如果 $\mu(X)<\infty(X\in\mathscr{R})$，那么有限可加测度 μ 是测度的充要条件是 μ 有上连续性。

6. 设 μ 是环 $\mathscr{R}$ 上的测度，证明：

1）如果 $E,F\in\mathscr{R}$，$\mu(E\Delta F)=0$，那么 $\mu(E)=\mu(F)$；

2）如果 $\mu(E\Delta F)=0$，那么称 E 等价于 F，记为 $E\sim F$，证明“$\sim$”是一个等价关系；

3）如果 $E,F\in\mathscr{R}$，定义 $\rho(E,F)=\mu(E\Delta F)$，证明 $\rho(E,G)\leqslant\rho(E,F)+\rho(F,G)$ 对所有的 $E,F,G\in\mathscr{R}$ 成立。

7. 构造一个正测度的疏朗完全集。

第三节　外测度

本节将从 X 上的一个集类 $\mathscr{E}$ 上的函数 $\rho:\mathscr{E}\to[0,\infty]$ 出发，给出定义在由 $\mathscr{E}$ 决定的一个 σ-环 $\mathscr{H}(\mathscr{E})$ 上的外测度 μ^*，然后再用卡拉泰屋独利(Caratheodory)条件定义 $\mathscr{H}(\mathscr{E})$ 的一个子类 $\mathscr{E}^*$，它也是一个 σ-环，使 μ^* 成为 $\mathscr{E}^*$ 上的测度。

定义1　设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的一个 σ-环，函数 $\mu^*:\mathscr{R}\to[0,\infty]$ 称为外测度，如果

1) $\mu^*(\varnothing)=0$；

2)（单调性）对 $A,B\in\mathscr{R}$，$A\subset B$ 有 $\mu^*(A)\leqslant\mu^*(B)$；

3)（次可列可加性）如果 $\{A_j\}_1^\infty\subset\mathscr{R}$，$\bigcup A_j\in\mathscr{R}$，那么 $\mu^*(\bigcup A_j)\leqslant\Sigma\mu^*(A_j)$。

可见外测度是较测度为弱的一种函数。

定理1　设 $\mathscr{E}$ 是 X 上的一个集类，$\rho:\mathscr{E}\to[0,\infty]$ 满足 $\rho(\varnothing)=0$。

1)令

$$\mathscr{H}(\mathscr{E})=\{E\subset X:\text{存在}\{E_i\}\subset\mathscr{E}\text{ 使 }E\subset\textstyle\bigcup_1^\infty E_i\},$$

那么 $\mathscr{H}(\mathscr{E})$ 是一个 σ-环；

2)对 $A\in\mathscr{H}(\mathscr{E})$ 令

$$\mu^*(A)=\inf\{\textstyle\Sigma_1^\infty\rho(E_j):E_j\in\mathscr{E}\text{ 并且 }A\subset U_1^\infty E_j\},\tag{1}$$

那么 μ^* 是 $\mathscr{H}(\mathscr{E})$ 上的外测度。

证明：1) $\mathscr{H}(\mathscr{E})$ 对差运算显然封闭，所以只要证明 $\mathscr{H}(\mathscr{E})$ 对可列和运算封闭。设 $\{E_i\}\subset\mathscr{H}(\mathscr{E})$，那么对每个 E_i，有 $\{E_i^{(j)}\}_1^\infty\subset\mathscr{E}$ 使 $E_i\subset\bigcup_{j=1}^\infty E_i^{(j)}$。显然 $\bigcup E_i\subset\bigcup_{i=1}^\infty\bigcup_{j=1}^\infty E^{(j)_i}$，因此 $\bigcup E_i\in\mathscr{H}(\mathscr{E})$。

2)由 $\rho(\varnothing)=0$ 可得 $\mu^*(\varnothing)=0$。为证单调性，只要注意到如果 $A\subset B$，那么 $\{\{F_i\}\subset\mathscr{E}:B\subset\bigcup_{i=1}^\infty F_i\}\subset\{\{E_i\}\subset\mathscr{E}:A\subset\bigcup_{i=1}^\infty E_i\}$。现证次可列可加性。设 $\{E_i\}\subset\mathscr{H}(\mathscr{E})$，$\varepsilon>0$。由 μ^* 的定义可以选取 $E_i^{(j)}\in$

$\mathscr{E}$,使 $E_i\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}E_1^{(j)}$,并且 $\Sigma_{j=1}^{\infty}\rho(E_i^{(j)})\leqslant\mu^*(E_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}$。令 $E=\bigcup E_i$,那么 $E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}E_i^{(j)}$,并且 $\mu^*(E)\leqslant\Sigma_{i=1}^{\infty}\Sigma_{j=1}^{\infty}\mu(E_i^{(j)})\leqslant\Sigma_i(\mu^*(E_i)+\frac{\varepsilon}{2^i})=\Sigma_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)+\varepsilon$。令 $\varepsilon\to 0$ 即得次可列可加性。

注 1　一般来说,μ^* 不是测度。例如令 $X=[0,1]$,$\mathscr{E}=\{\varnothing,[0,1]\}$。在 $\mathscr{E}$ 上定义 ρ,使 $\rho(\varnothing)=0$,$\rho([0,1])=1$。这时对任何非空集 $E\in\mathscr{P}(X)$ 有 $\mu^*(E)=1$,于是

$$\mu^*\left([0,\frac{1}{2}]\right)+\mu^*\left((\frac{1}{2},1]\right)=2\neq 1=\mu^*\left([0,\frac{1}{2}]\cup(\frac{1}{2},1]\right)。$$

现在我们要从 $\mathscr{H}(\mathscr{E})$ 中取出一个子类 $\mathscr{E}^*$,以期 μ^* 限制在 $\mathscr{E}^*$ 上是一个测度。集 $A\in\mathscr{H}(\mathscr{E})$ 称为 μ^*—可测的,如果对任何 $\mathscr{E}\in\mathscr{H}(\mathscr{E})$ 有

$$\mu^*(E)=\mu^*(E\cup A)+\mu^*(E-A),\tag{2}$$

也即 A 称为 μ^*—可测,如果 A 可以"分割测量"$\mathscr{H}(\mathscr{E})$中的任意一个集合 E。由次可加性,(2)等价于

$$\mu^*(E)\geqslant\mu^*(E\cup A)+\mu^*(E-A)。\tag{3}$$

如果 $\mu^*(E)=\infty$,那么(3)恒成立。因此 $A\in\mathscr{H}(\mathscr{E})$是 μ^*—可测的当且仅当(3)对 $\mathscr{H}(\mathscr{E})$ 中一切有有限外测度的子集 E 成立。

定理 2(卡拉泰屋独利定理)　设 $\mathscr{E}$、ρ、$\mathscr{H}(\mathscr{E})$、μ^*、$\mathscr{E}^*$ 定义如上,那么 $\mathscr{E}^*$ 是一个 σ-环,μ^* 是 $\mathscr{E}^*$ 上的完全测度。

证明:证明分五步。

一、证明 $\mathscr{E}^*$ 对差运算封闭。设 $A,B\in\mathscr{E}^*$,那么对 $E\in\mathscr{H}(\mathscr{E})$有

$$\begin{aligned}\mu^*(E)&=\mu^*(E-A)+\mu^*(E\cap A)\\&=\mu^*(E-A)+\mu^*(E\cap A\cap B)\\&\quad+\mu^*((E\cap A)-B)\\&=\mu^*(E-A)+\mu^*(E\cap A\cap B)\\&\quad+\mu^*(E\cap(A-B))\\&\geqslant\mu^*(E\cap(A-B))+\mu^*(E-(A-B))\end{aligned}$$

(见习题Ⅰ.1(A)2.3)),因此 $A-B\in\mathscr{E}^*$。

二、证明 $\mathscr{E}^*$ 对并运算封闭。易见

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E\cap A)+\mu^*(E-A)\\ &= \mu^*(E\cap A)+\mu^*((E-A)\cap B)\\ &\quad +\mu^*(E-A-B)\\ &\geqslant \mu^*(E\cap(A\cup B))+\mu^*(E-(A\cup B))\end{aligned}$$

(见图 1),因此 $A\cup B\in\mathscr{E}^*$。

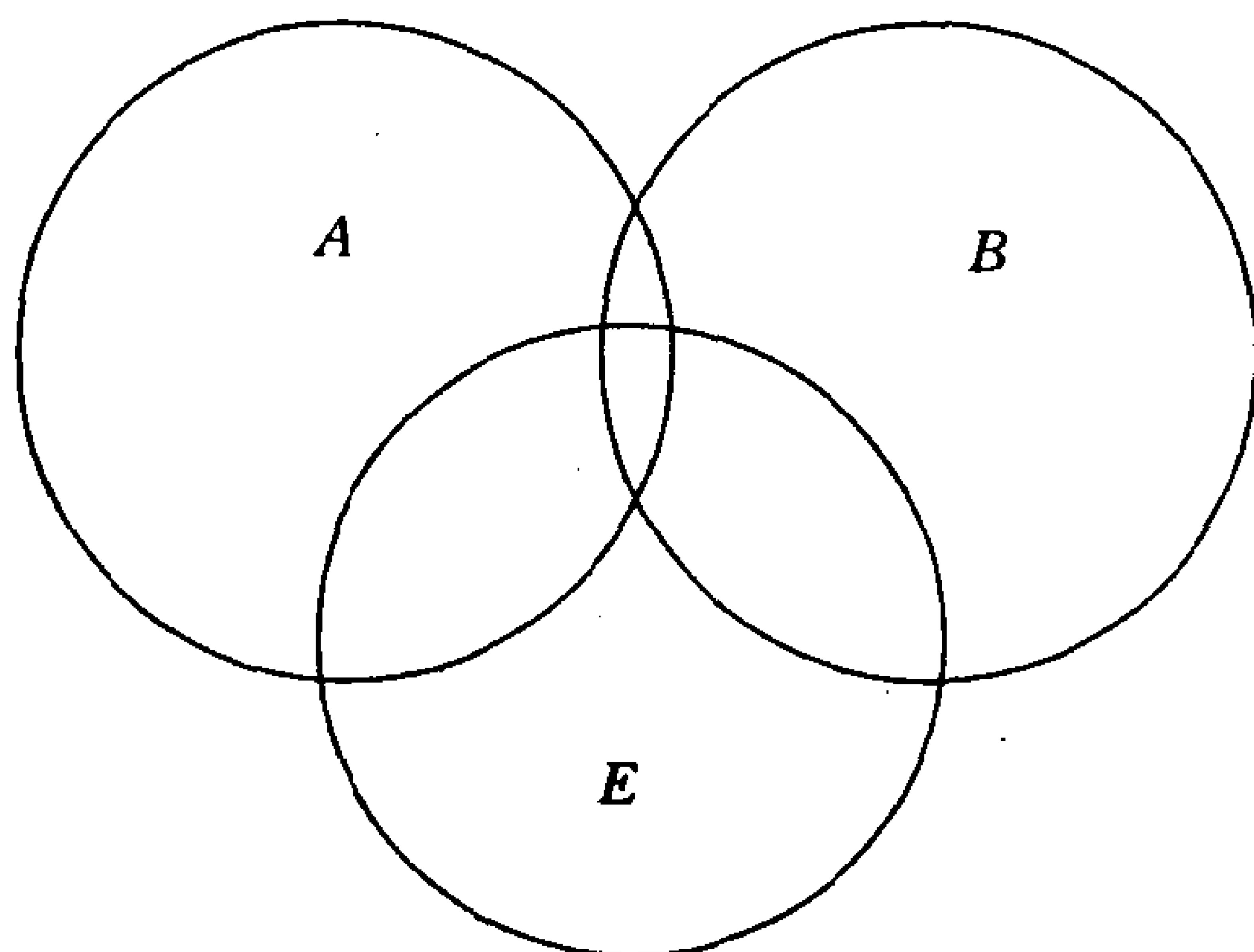


图1

三、证明 $\mathscr{E}^*$ 对可列并运算封闭。设 $\{A_j\}$ 是 $\mathscr{E}^*$ 中不相交集的序列。令 $B_n=\bigcup_1^n A_j, B=\bigcup_1^\infty A_j$。对 $E\in\mathscr{H}(\mathscr{E})$ 有

$$\begin{aligned}\mu^*(E\cup B_n) &= \mu^*(E\cap B_n\cap A_n)+\mu^*(E\cap B_n-A_n)\\ &= \mu^*(E\cap A_n)+\mu^*(E\cap B_{n-1})。\end{aligned}$$

由归纳法可知 $\mu^*(E\cap B_n)=\Sigma_1^n\mu^*(E\cap A_j)$。又因为 $\mathscr{E}^*$ 对并运算封闭,有

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E\cap B_n)+\mu^*(E-B_n)\\ &\geqslant \Sigma_1^n\mu^*(E\cap A_j)+\mu^*(E-B)\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$,得

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\geqslant \Sigma_1^\infty\mu^*(E\cap A_j)+\mu^*(E-B)\\ &\geqslant \mu^*(\textstyle\bigcup_1^\infty(E\cap A_j))+\mu^*(E-B)\end{aligned}$$

$$=\mu^*(E\cap B)+\mu^*(E-B)$$

这表明 B 使(2)式成立,因此 $B\in\mathscr{E}^*$,从而 $\mathscr{E}^*$ 是 σ-环。

四、证明 μ^* 在 $\mathscr{E}^*$ 上有可列可加性。令 $E=B$,由(4)即得 $\mu^*(B)=\Sigma_1^\infty\mu^*(A_j)$。

五、证明 μ^* 是 $\mathscr{E}^*$ 上的完全测度。为此要证如果 $\mu^*(A)=0$,那么 $A\in\mathscr{E}^*$。对 $\mathscr{E}\in\mathscr{H}(\mathscr{E})$ 有

$$\mu^*(E)\leqslant\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E-A)$$
$$=\mu^*(E-A)\leqslant\mu^*(E)。$$

因此(2)式成立,从而 $A\in\mathscr{E}^*$。

考虑到我们要构造的测度往往要求在事先给定的环上取给定的值,因此我们对把环上的测度扩张到 σ-环上的情形给予特别的注意。

定理 3 设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的一个环,μ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度,μ^* 是 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 上按(1)定义的外测度,那么

1) $\mu^*|_{\mathscr{R}}=\mu$;

2) $\mathscr{S}(\mathscr{R})\subset\mathscr{E}^*$。

证明:1)设 $E\in\mathscr{R}$,取 $A_1=E$,$A_j=\varnothing$ 对 $j\geqslant2$。那么 $\Sigma_1^\infty\mu(A_j)=\mu(E)$,因此 $\mu^*(E)\leqslant\mu(E)$。另一方面,设 $\{A_j\}\subset\mathscr{R}$,$E\subset\bigcup A_j$,令 $B_n=E\cap(A_n-\bigcup_1^{n-1}A_j)$,那么 $\{B_n\}$ 是 $\mathscr{R}$ 中互不相交集的序列,并且 $\bigcup B_n=E\in\mathscr{R}$,因此 $\mu(E)=\Sigma_1^\infty\mu(B_n)\leqslant\Sigma_1^\infty\mu(A_j)$。这样 $\mu(E)\leqslant\mu^*(E)$。

2)因为 $\mathscr{E}^*$ 是一个 σ-环,所以只要证明 $\mathscr{R}\subset\mathscr{E}^*$。设 $A\in\mathscr{R}$,对 $E\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 和 $\varepsilon>0$ 有 $\{B_j\}\subset\mathscr{R}$ 使 $E\subset\bigcup B_j$,并且 $\Sigma_1^\infty\mu(B_j)<\mu^*(E)+\varepsilon$。因为 μ 在 R 上有可加性,所以

$$\mu^*(E)+\varepsilon\geqslant\Sigma_1^\infty\mu(B_j\cap A)+\Sigma_1^\infty\mu(B_j-A)$$
$$\geqslant\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E-A)。$$

令 $\varepsilon\to0$,即得(3),因此 $A\in\mathscr{E}^*$。

定理 3 表明 $\mathscr{E}^*$ 上的测度 μ^* 是 $\mathscr{R}$ 上的测度 μ 的扩张。用不同的办法可能得到不同的 $\mathscr{E}^*$ 和不同的 μ^*,但是把这些 μ^* 限制在 $\mathscr{R}$ 上却是一致的。那么限制在 $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ 上又如何呢?

定理4 设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的环，μ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度，μ^* 是按(1)定义的外测度。如果 γ 是 μ 在 $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ 上的一个扩张，那么对 $E\in\mathscr{S}(\mathscr{R})$ 有 $\gamma(E)\leqslant\mu^*(E)$；如果 $\mu^*(E)<\infty$，那么 $\gamma(E)=\mu^*(E)$。因此如果 μ 是 σ-有限的，那么 μ 在 $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ 上的扩张是唯一的。

证明：设 $E\in\mathscr{S}(\mathscr{R})$。因为 $\mathscr{S}(\mathscr{R})\subset\mathscr{E}^*\subset\mathscr{H}(\mathscr{R})$，存在 $\{A_j\}\subset\mathscr{R}$ 使 $E\subset\bigcup_1^\infty A_j$。因此 $\gamma(E)\leqslant\Sigma_1^\infty\gamma(A_j)=\Sigma_1^\infty\mu(A_j)$。由(1)有

$$\gamma(E)\leqslant\mu^*(E)。\tag{5}$$

记 $A=\bigcup A_j$，则 $A\in\mathscr{S}(\mathscr{R})$，从而 $A\in\mathscr{E}^*$，由测度 γ 和 μ^*/ε^* 的下连续性有

$$\gamma(A)=\lim(\bigcup_1^n A_j)=\lim\mu(\bigcup_1^n A_j)=\mu^*(A)。\tag{6}$$

如果 $\mu^*(E)<\infty$，那么可以选取上述的 A_j 使 $\mu^*(A)\leqslant\Sigma\mu^*(A_j)<\mu^*(E)+\varepsilon$。由 μ^* 的单调性以及(6)和(5)有

$$\mu^*(E)\leqslant\mu^*(A)=\gamma(A)=\gamma(E)+\gamma(A-E)$$
$$\leqslant\gamma(E)+\mu^*(A-E)\leqslant\gamma(E)+\varepsilon。$$

令 $\varepsilon\to0$，即得 $\mu^*(E)=\gamma(E)$。

如果 μ 是 σ-有限测度，由定义2.3存在 $\{A_j\}\subset\mathscr{R}$，使 $E\subset\bigcup A_j$，$\mu(A_j)<\infty$。不失一般性可设 A_j 互不相交，于是

$$\mu^*(E)=\Sigma_1^\infty\mu^*(E\cap A_j)=\Sigma_1^\infty\gamma(E\cap A_j)=\gamma(E)。$$

习　题

A 类

1. 设 X 是可列无限集，$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$，$\mathscr{R}$ 是 X 中有限子集所成的环，对任何 $E\in\mathscr{R}$，$\mu_1(E)$ 是 E 中点的个数，$\mu_2(E)=\alpha\mu_1(E)$（α 是常数）。证明 μ_1^*，μ_2^* 都是 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 上的测度。

2. 设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的 σ-环，μ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度，证明 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 上的集函数

$$\mu^*(E)=\inf\{\mu(F)\mid E\subset F\in R\}$$

是外测度。

3. 设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的环，μ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度，

1)证明 μ 零测集全体是 $\mathscr{R}$ 的子环，并举例说明不必是 σ-环；

2)举例说明 $\mathscr{R}$ 虽不是 σ-环，但 μ—零测集全体却是 σ-环；

3)如果 $\mathscr{R}$ 是 σ-环，那么 μ—零测集全体必是 σ-环。

4. 设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的环，μ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度，$\mathscr{N}$ 是 μ—零测集的所有子集全体，$\mathscr{R}'$ 是一切 $E=(F\cup N_1)-N_2(F\in\mathscr{R},N_1,N_2\in\mathscr{N})$ 的全体，并规定 $\mu'(E)=\mu(F)$。证明 μ' 是 σ-环在 $\mathscr{R}'$ 上的完全测度。

5. 设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的环，μ 是 $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ 上的 σ-有限测度。举例说明当 μ 限制在 $\mathscr{R}$ 上时，μ 不是 $\mathscr{R}$ 上的 σ-有限测度。

6. 设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的环，μ_1,μ_2 是 $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ 上两个 σ-有限测度，并且对一切 $E\in\mathscr{R}$，$\mu_1(E)=\mu_2(E)$，举例说明在 $\mathscr{S}(\mathscr{R})$ 上可以 $\mu_1\neq\mu_2$。

B 类

1. 设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的 σ-环，μ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度，作 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 上的集函数 μ_* 如下：当 $E\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 时，

$$\mu_*(E)=\sup\{\mu(F):E\supset F\in\mathscr{R}\}。$$

称 μ_* 为内测度，讨论内测度的性质。

2. 设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的代数，μ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度，并且 $\mu(X)<\infty$，定义

$$\mu_*(E)=\mu(X)-\mu^*(X-E),E\in\mathscr{H}(\mathscr{R})。$$

称 μ_* 为内测度，讨论 μ_* 的各种性质。当 $\mathscr{R}$ 是 σ-代数时，讨论这里的 μ_* 与第 1 题中 μ_* 的关系。

3. 设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的 σ-代数，μ 是 $\mathscr{R}$ 上的有限测度，μ_* 是 $\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 上的内测度，当 $E\in\mathscr{H}(\mathscr{R})$ 时 $\mu_*(E)=\sup\{\mu(F):E\supset F\in\mathscr{R}\}$。证明 $E\in\mathscr{R}^*$ 当且仅当 $\mu^*(E)=\mu_*(E)$。

4. 设 $\mathscr{R}$ 是 X 的某些子集所成的环，μ 是 $\mathscr{R}$ 上的测度，任取 $E\subset X$，记 $\mathscr{R}_E=\{F:F\in\mathscr{R},F\subset E\}$，$\mu_E$ 是 μ 在环 $\mathscr{R}_E$ 上的限制，$\mathscr{R}_E^*,\mu_E^*$ 是 $\mathscr{R}_E$ 上 μ_E 按卡拉泰屋独利条件的扩张。举例说明 $\mathscr{R}_E^*\neq\mathscr{R}^*\cap E$。

5. 举例说明环 $\mathscr{R}$ 上测度 μ 按卡拉泰屋独利条件所得的扩张

R^*,μ^*并不一定是$\mathscr{R},\mu$的最大扩张。

6. 设μ是σ-环$\mathscr{R}$上的σ-有限测度，$\mathscr{N}$是$\mathscr{R}$中μ测度为零的集的所有子集全体，那么

1)$\mathscr{R}^*=\mathscr{S}(\mathscr{R}\cup\mathscr{N})$；

2)对任何$E\in\mathscr{R}^*$，总存在$F\in\mathscr{R},N_1$、$N_2\in\mathscr{N}$，使$E=(F\cup N_1)-N_2$；

3)2)中的E、F满足$\mu^*(E)=\mu(F)$。

7. 如果μ是$\mathscr{R}$上的σ-有限测度，那么

1)$\mathscr{R}^*$中任何集必可表示为$\mathscr{S}(\mathscr{R})$中集与一个μ^*一零测集的差，

2)$\mathscr{R}^*$中任何集必可表示成$\mathscr{S}(\mathscr{R})$中集与一个μ^*一零测集的和。

8. 如果μ^*是一个外测度，$\{A_j\}_1^\infty$是不相交的μ^*一可测集序列，那么$\mu^*(E\cap(\cup_1^\infty A_j))=\Sigma_1^\infty\mu^*(E\cap A_j)$对任一$E\subset X$成立。

第四节　直线上的勒贝格—斯蒂阶测度

本节我们将把前几节的结果用到$X=\mathbf{R}$的情形。在例1.3中我们定义了集类$\mathscr{P}$(直线上有限左开右闭区间的全体)和$\mathscr{R}_0$($\mathscr{P}$中有限个元的并)，并且指出$\mathscr{R}_0$是一个环，现在我们要在环$\mathscr{R}_0$上定义一个测度。$\mathscr{R}_0$中任一元E可以分解为$\mathscr{P}$中有限个元的并，$E=\cup_1^n(a_i,b_i]$，称这种分解为初等分解，显然E的初等分解不是唯一的，但是我们仍可以用初等分解来定义E的测度。

对于定义在闭区间$[a,b]$上的函数f总可以按下面的方式延拓成为$\mathbf{R}$上的函数，

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(a) & \text{对 } x<a,\\ f(b) & \text{对 } x>b。\end{cases}$$

因此下面我们只讨论把$\mathbf{R}$映到$\mathbf{R}$函数。

设$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$是单调增函数，那么由例Ⅰ.3.1可知$f$在每一点都

有左、右极限：

$$f(a^+)=\lim_{x\to a^+}f(x)=\inf_{x>a}f(x),$$

$$f(a^-)=\lim_{x\to a^-}f(x)=\sup_{x<a}f(x)。$$

而且极限

$$f(\infty)=\sup_{x\in R}f(x),$$

$$f(-\infty)=\inf_{x\in R}f(x)$$

也都存在(可能等于$\pm\infty$)。如果$f(a)=f(a^+)$，那么称f在a点右连续；如果f在任意一点$a\in \boldsymbol{R}$都右连续，那么称f在$\boldsymbol{R}$上右连续。

定理1 设$g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$是右连续增函数，$E\in\mathscr{R}_0$的初等分解为$E=\bigcup_1^n(a_i,b_i]$，定义

$$\mu_g(E)=\Sigma_1^n(g(b_i)-g(a_i)), \tag{1}$$

那么μ_g是$\mathscr{R}_0$上的测度。

证明：首先指出(1)表明

$$\mu_g((a,b])=g(b)-g(a)。 \tag{2}$$

我们先证明μ_g是一意确定的，即不依赖于$\mathscr{R}_0$中元的初等分解。首先考虑$E=(a,b]$的情形，设$(a,b]=\bigcup_1^n(a_i,b_i]$，$(a_i,b_i]$互不相交。不妨设$a=a_1<b_1=a_2<b_2=\cdots<b_n=b$，因此

$$\Sigma_1^n[g(b_i)-g(a_i)]=g(b)-g(a)。 \tag{3}$$

对一般的E，假设E有两种初等分解：$E=\bigcup_1^n I_i=\bigcup_1^m J_j$，$I_i$、$J_j$都是左开右闭区间，$\{I_i\}$互不相交，$\{J_j\}$互不相交。因为$I_i=\bigcup_{j=1}^m I_i\cap J_j$，而$I_i\cap J_j$不是空集就是左开右闭区间，因此由(3)有

$$\Sigma_1^n\mu_g(I_i)=\Sigma_1^n\Sigma_1^m\mu_g(I_i\cap J_j)=\Sigma_1^m\mu_g(J_j)。$$

于是一意性得证。

下面证明μ_g是一个测度。因为$\varnothing=(a,a]$，所以$\mu_g(\varnothing)=0$。由定义易知μ_g具有有限可加性。现证μ_g具有可列可加性。设$\{I_j\}$是$\mathscr{P}$中互不相交元的序列，并且$I=\bigcup_1^\infty I_j\in\mathscr{R}$。因为$I$是有限个左开右闭区间的并，且已知$\mu_g$具有有限可加性，可以假设$I=(a,b]$。于是有

$$\mu_g(I)=\mu_g(\bigcup_1^n I_j)-\mu_g(I-\bigcup_1^n I_j)$$

$$\geqslant \mu_g(\bigcup_1^n I_j)=\Sigma_1^n \mu_g(I_j)。$$

令 $n\to\infty$,得到 $\mu_g(I)\geqslant\Sigma_1^\infty \mu_g(I_j)$。为证反方向的不等式,先假设 $-\infty<a<b<+\infty$。因为 g 右连续,对 $\varepsilon>0$,有 $\delta>0$,使 $g(a+\delta)-g(a)<\varepsilon$。设 $I_j=(a_j,b_j]$,那么对任一 j,有 $\delta_j>0$,使 $g(b_j+\delta_j)-g(b_j)<\varepsilon/2^j$。易见开区间族 $\{(a_j,b_j+\delta_j)\}_1^\infty$ 覆盖有界闭区间 $[a+\delta,b]$。由有限覆盖定理,不妨设 $\{(a_j,b_j+\delta_j)\}_{j=1}^N$ 覆盖 $[a+\delta,b]$,并且 $a_1<a_2<\cdots<a_N$,$b_j+\delta_j\in(a_{j+1},b_{j+1}+\delta_{j+1})(j=1,\cdots,N-1)$。因此

$$\begin{aligned}\mu_g(I)&=g(b)-g(a)\leqslant g(b)-g(a+\delta)+\varepsilon\\&\leqslant g(b_n+\delta_N)-g(a_1)+\varepsilon\\&=g(b_N+\delta_N)-g(a_N)+\Sigma_1^{N-1}[g(a_{j+1})-g(a_j)]+\varepsilon\\&\leqslant g(b_N+\delta_N)-g(a_N)+\Sigma_1^{N-1}[g(b_j+\delta_j)-g(a_j)]+\varepsilon\\&\leqslant g(b_N)-g(a_N)+\varepsilon/2^N+\Sigma_1^{N-1}[g(b_j)-g(a_j)+\varepsilon/2^j]+\varepsilon\\&\leqslant\Sigma_1^N\mu_g(I_j)+2\varepsilon\leqslant\Sigma_1^\infty\mu_g(I_j)+2\varepsilon。\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to0$,即得 $\mu_g(I)\leqslant\Sigma_1^\infty\mu_g(I_j)$,因此 $\mu_g(I)=\Sigma_1^\infty\mu_g(I_j)$。

如果 $a=-\infty$,$(-\infty,b]=\bigcup_1^\infty I_j$,那么用 $-M$ 代 $-\infty$,记 $I'_j=(-M,b]\cap I_j$,由上面的证明有 $g(b)-g(-M)\leqslant\Sigma_1^\infty\mu_g(I'_j)\leqslant\Sigma_1^\infty\mu_g(I_j)$。令 $M\to+\infty$,即得 $g(b)-g(-\infty)\leqslant\Sigma_1^\infty\mu_g(I_j)$。如果 $b=+\infty$,类似地可证 $g(+\infty)-g(-\infty)\leqslant\Sigma_1^\infty\mu_g(I_j)$。而反方向的不等式显然也成立,因此 $\mu_g(I)=\Sigma_1^\infty\mu_g(I_j)$恒成立。

我们已经在 $\mathscr{R}_0$ 上定义了测度 μ_g,现在来具体计算(a,b),$[a,b)$,$[a,b]$的测度。因为$(a,b)=\bigcup_1^\infty(a,b-\frac{1}{n}]$,而测度具有下连续性,因此

$$\begin{aligned}\mu_g((a,b))&=\lim\mu_g\left((a,b-\frac{1}{n}]\right)\\&=\lim\left(g(b-\frac{1}{n})-g(a)\right)\\&=g(b^-)-g(a)。\end{aligned}\tag{4}$$

类似地,因为$[a,b)=\bigcap_1^\infty\left(a-\frac{1}{n},b\right)$,$[a,b]=\bigcap_1^\infty\left(a-\frac{1}{n},b\right]$,利用测

度的上连续性可证

$$\mu_g([a,b))=g(b^-)-g(a^-); \quad (5)$$

$$\mu_g([a,b])=g(b)-g(a^-)。 \quad (6)$$

下面我们来讨论为什么要求函数 g 具有右连续性。假设 μ_g 是 $\mathscr{R}_0$ 上的测度，并且 $\mu_g((a,b])=g(b)-g(a)$，那么由测度的连续性就有(4)，(5)和(6)(在推导(4)、(5)、(6)时并没有要求 g 具有右连续性)。注意到单点集 $\{a\}$ 有两种表示

$$\{a\}=\bigcap_1^\infty\left(a-\frac{1}{n},a\right]; \quad (7)$$

$$\{a\}=\bigcap_1^\infty\left[a,a+\frac{1}{n}\right]。 \quad (8)$$

由(7)和测度的上连续性有

$$\mu_g(\{a\})=\lim\left(g(a)-g(a-\frac{1}{n})\right) =g(a)-g(a^-)。 \quad (9)$$

由(8)和测度的上连续性有

$$\mu_g(\{a\})=\lim\left(g(a+\frac{1}{n})-g(a^-)\right) =g(a^+)-g(a^-)。 \quad (10)$$

显然(9)、(10)两式的右端应该相等，因此 $g(a^+)=g(a)$。这表明如果我们用一个单调增函数 g 按(1)式在 $\mathscr{R}_0$ 上定义了一个测度，那么 g 必须是右连续的。

由定理 3.1 和 3.2 可知，μ_g 在 $\mathscr{H}(\mathscr{R}_0)(=\mathscr{P}(\mathscr{R}))$ 上定义了一个外测度 μ_g^*，μ_g^* 一可测集全体记为 $\mathscr{L}^g$，是一个 σ-代数，μ_g^* 限制在 $\mathscr{L}^g$ 上是一个完全测度。这个测度称为勒贝格—斯蒂阶(Lebesgue—Stieltjes)测度，简称为 $L-S$ 测度，仍用 μ_g 记之。$\mathscr{L}^g$ 中的元称为勒贝格—斯蒂阶可测集，简称为 $L-S$ 可测集。易见对任一 $E\in\mathscr{L}^g$，有

$$\mu_g(E)=\inf\{\Sigma_1^\infty\mu_g((a_j,b_j]):E\subset\bigcup_1^\infty(a_j,b_j]\} =\inf\{\Sigma_1^\infty[g(b_j)-g(a_j)]:E\subset\bigcup_1^\infty(a_j,b_j]\}。$$

定义 1 由 $\mathscr{R}_0$ 生成的 σ-代数 $\mathscr{S}(\mathscr{R}_0)$ 称为波雷耳(Borel)代数，

记为 $\mathscr{B}$。$\mathscr{B}$ 中的元称为波雷耳集，定义在 $\mathscr{B}$ 上的测度称为波雷耳测度。由定理 3.3 有 $B\subset\mathscr{L}^g$，所以 $L-S$ 测度在 B 上的限制是波雷耳测度。

下面我们来研究 $L-S$ 可测集与波雷耳集的关系。

命题 1 $\mathscr{B}$ 是由下面的集类生成的 σ-代数。

1)开区间集类 $\mathscr{E}_1=\{(a,b):a<b\}$；

2)闭区间集类 $\mathscr{E}_2=\{[a,b]:a<b\}$；

3)开射线集类 $\mathscr{E}_3=\{(a,+\infty):a\in\boldsymbol{R}\}$ 或 $\mathscr{E}_4=\{(-\infty,a):a\in\boldsymbol{R}\}$；

4)闭射线集类 $\mathscr{E}_5=\{[a,+\infty):a\in\boldsymbol{R}\}$ 或 $\mathscr{E}_6=\{(-\infty,a]:a\in\boldsymbol{R}\}$。

证明：因为 $(a,b)=\bigcup_1^\infty(a,b-\frac{1}{n}]$，$[a,b]=\bigcap_1^\infty(a-\frac{1}{n},b]$，$(a,+\infty)=\bigcup_1^\infty(a,n]$，所以对 $i=1,2,3$ 有 $\mathscr{E}_i\subset\mathscr{B}$，从而 $\mathscr{S}(\mathscr{E}_i)\subset\mathscr{B}$。另一方面，因为 $(a,b]=\bigcap_1^\infty(a,b+\frac{1}{n})=\bigcup_1^\infty[a+\frac{1}{n},b]=(a,+\infty)-(b,+\infty)$，所以对 $i=1,2,3$ 有 $\mathscr{R}_0\subset\mathscr{S}(\mathscr{E}_i)$，从而 $\mathscr{B}\subset\mathscr{S}(\mathscr{E}_i)$，因此 $\mathscr{B}=\mathscr{S}(\mathscr{E}_i)$。

其余情形的证明作为习题留给读者。

推论 1 直线上的单点集、有限集、可列集、有限区间 (a,b)、$(a,b]$、$[a,b)$、$[a,b]$、射线、全直线、开集、闭集都是波雷耳集。

引理 1 对任一 $E\subset\boldsymbol{R}$，有

$$\mu_g^*(E)=\inf\{\Sigma_1^\infty\mu_g(a_j,b_j):E\subset\bigcup_1^\infty(a_j,b_j)\}。$$

证明：用 $\gamma(E)$ 表示等式右边的量。设 $E\subset\bigcup_1^\infty(a_j,b_j)$，令 $l_j=b_j-a_j$，$I_j^{(k)}=\left(b_j-\frac{l_j}{2^{k-1}},b_j-\frac{l_j}{2^k}\right]$ $(k\in N)$，那么 $I_j^{(k)}$ 两两不相交，并且 $(a_j,b_j)=\bigcup_{k=1}^\infty I_j^{(k)}$。因此 $E\subset\bigcup_{j,k=1}^\infty I_j^{(k)}$，并且

$$\mu_g^*(E)\leqslant\Sigma_{j,k=1}^\infty\mu_g(I_j^{(k)})=\Sigma_{j=1}^\infty\mu_g((a_j,b_j)),$$

所以 $\mu_g^*(E)\geqslant\gamma(E)$。另一方面，对 $\varepsilon>0$，有 $\{(a_j,b_j]\}_1^\infty$ 使 $E\subset\bigcup_1^\infty(a_j,b_j]$，并且 $\Sigma_1^\infty\mu_g((a_j,b_j])\leqslant\mu_g^*(E)+\varepsilon$。对任一 j，有 $\delta_j>0$ 使 $g(b_j$

$+\delta_j)-g(b_j)<\varepsilon/2^j$。于是 $E\subset\bigcup_1^\infty(a_j,b_j+\delta_j)$，并且

$$\begin{aligned}\Sigma_1^\infty\mu_g(a_j,b_j+\delta_j)&=\Sigma_1^\infty[g((b_j+\delta_j)^+)-g(a_j)]\\&\leqslant\Sigma_1^\infty[g(b_j+\delta_j)-g(a_j)]\\&\leqslant\Sigma_1^\infty[g(b_j)-g(a_j)+\varepsilon/2^j]\\&\leqslant\Sigma_1^\infty\mu_g((a_j,b_j])+\varepsilon\\&\leqslant\mu_g^*(E)+2\varepsilon。\end{aligned}$$

由此可得 $\gamma(E)\leqslant\mu_g^*(E)+2\varepsilon$。令 $\varepsilon\to0$，即得 $\gamma(E)\leqslant\mu_g^*(E)$，因此 $\mu_g^*(E)=\gamma(E)$。

定理 2 如果 $E\subset\boldsymbol{R}$，那么

$$\mu_g^*(E)=\inf\{\mu_g|U):E\subset U,U\text{ 是开集}\}。$$

证明：用 $\gamma(E)$ 表示等式右边的量。不妨设 $U=\bigcup_1^\infty(a_j,b_j)$，则 $\mu_g(U)\leqslant\Sigma\mu_g((a_j,b_j))$，因此由引理 1 后半部分的证明可得 $\gamma(E)\leqslant\mu_g^*(E)$。

另一方面，μ_g^* 作为 $\mathscr{P}(\boldsymbol{R})$ 上的外测度有单调性，又因为 U 是开集，属于 $\mathscr{L}^g$，因此有 $\mu_g^*(E)\leqslant\mu_g^*(U)=\mu_g(U)$，由此立即得到 $\mu_g^*(E)\leqslant\gamma(E)$。

定理 3 对 $E\subset\boldsymbol{R}$ 下列断言是等价的。

1) $E\in\mathscr{L}^g$；

2) 对任一 $\varepsilon>0$，有开集 $O\supset E$ 使 $\mu_g^*(O-E)<\varepsilon$；

3) 对任一 $\varepsilon>0$，有闭集 $F\subset E$ 使 $\mu_g^*(E-F)<\varepsilon$；

4) $E=G-N$，其中 G 为 G_δ 集，$\mu_g(N)=0$；

5) $E=F\cup N$，其中 F 为 F_σ 集，$\mu_g(N)=0$。

证明：我们分两个循环来证明，1)⇒2)⇒4)⇒1)；1)⇒3)⇒5)⇒1)。

1)⇒2)，应用定理 2。2)⇒4)，对 $n\in N$ 有开集 $O_n\supset E$，使 $\mu_g^*(O_n-E)<\frac{1}{n}$，令 $O=\bigcap_1^\infty O_n$，那么 O 是 G_δ 集，并且 $\mu_g^*(O-E)\leqslant\mu_g^*(O_n-E)<\frac{1}{n}$。令 $n\to\infty$，得 $\mu_g^*(G-E)=0$。令 $N=G-E$，那么 N

为 μ_g^* 一零测集。由定理 3.2，$N\in\mathscr{L}^g$，并且 $\mu_g(N)=0$。4)⇒1)，因为 $G,N\in\mathscr{L}^g$，所以 $E\in\mathscr{L}^g$。

1)⇒3)，设 $E\in\mathscr{L}^g$，那么 $E^c\in\mathscr{L}^g$。因为 1)⇔2)，存在开集 $O\supset E^c$，使 $\mu_g(O-E^c)<\varepsilon$。令 $F=O^c$，它是闭集，并且 $F\subset E$。因为 $O-E^c=E-O^c$，所以 $\mu_g(E-F)<\varepsilon$。3)⇒5)类似于 2)⇒4)，5)⇒1)类似于 4)⇒1)，作为习题留给读者。

当 $g(x)=x$ 时，μ_g 称为勒贝格测度，简称为 L 测度，记为 m，$\mathscr{L}^g$ 记为 $\mathscr{L}$，下面我们来讨论勒贝格测度的性质。

定义 2 称 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的映射 $\tau_s:x\to x+s$ 为 $\boldsymbol{R}$ 上的一个平移，$\pi_t:x\to tx$ 为 $\boldsymbol{R}$ 上的一个伸缩。

定理 4 设 $E\subset\boldsymbol{R}$，$s,r\in\boldsymbol{R}$，那么

1)$E\in\mathscr{L}$ 当且仅当 $\tau_sE\in\mathscr{L}$，当 $E\in\mathscr{L}$ 时有 $m(\tau_sE)=m(E)$；

2)$E\in\mathscr{L}$ 当且仅当 $\pi_tE\in\mathscr{L}$，当 $E\in\mathscr{L}$ 时有 $m(\pi_t(E))=|t|m(E)$。

证明：由平移和伸缩的对称性，为证定理两个结论的前半部分，只要证明当 $E\in\mathscr{L}$ 时，$\tau_sE,\pi_tE\in\mathscr{L}$。

由定理 3，$E\in\mathscr{L}$ 当且仅当 $E=G-N$，其中 G 为 G_δ 集，$m(N)=0$，易证 $\tau_sE=\tau_sG-\tau_sN$，其中 τ_sG 仍为 G_δ 集。为证 $\tau_sE\in\mathscr{L}$，只要证明 $m(\tau_sN)=0$。因为 $m(N)=0$，对任一 $\varepsilon>0$，存在开集 $O\supset N$，使 $m(O)<\varepsilon$。易见 $\tau_sO\supset\tau_sE$，而 τ_sO 为开集，并且 $m(\tau_sO)=m(O)<\varepsilon$，因此 $m(\tau_sN)=0$。这就证明了当 $E\in\mathscr{L}$ 时，$\tau_sE\in\mathscr{L}$。类似地可以证明当 $E\in\mathscr{L}$ 时，$\pi_tE\in\mathscr{L}$。

为证定理两个结论的后半部分，只要注意到对任一开集 O 有 $m(\tau_s)=m(O)$，$m(\pi_tO)=|t|m(O)$，再用定理 2 即得本定理的结论。

定理 4 中的 1)称为勒贝格测度的平移不变性。

例 1 勒贝格不可测集。

利用平移不变性可以构造直线上的一个勒贝格不可测集，它的基本想法是构造一个集 Z，把 Z 平移至 $Z_n=\tau_{s_n}Z$，使

1)Z_n 两两不相交，

2)$[0,1]\subset\bigcup_1^\infty Z_n\subset[-1,2]$，
由 1)和 2)推断 Z 不可测。否则 $m(Z)$有定义，并且

$$1\leqslant m(\bigcup_1^\infty Z_n)=\Sigma_1^\infty m(Z)\leqslant 3,$$

而这是不可能的。

下面我们来构造 Z。在$[0,1]$中定义一个等价关系：$x\sim y$ 当且仅当 $x-y$ 是有理数。用 $\tilde{x}$表示由 x 定义的等价类，由策墨罗选择原理可以从每一个 $\tilde{x}$中选取一个元 x'，全体 x'组成一个集合，记为 Z。令$\{r_n\}$是$[-1,1]$中的全体有理数，记 $Z_n=\tau_{r_n}Z$，我们证明 1)、2)成立。假设 1)不成立，那么有 $m\neq n$ 及 $\xi\in Z_n\cap Z_m$，因此 $\xi=x'+r_n=y'+r_m$，对 $x',y'\in Z$。因为 $r_n\neq r_m$，所以 $x'\neq y'$，即 x',y'是不同等价类的代表，因此 $x'-y'$不是有理数。但是 $x'-y'=r_n-r_m$ 是有理数，矛盾。再检验 2)。因为 $x\in[0,1]$，$r_n\in[-1,1]$，所以$\bigcup_1^\infty Z_n\subset[-1,2]$。设 $\xi\in[0,1]$，它必属于某个等价类 $\tilde{x}$。假设 x'是 $\tilde{x}$在 Z 中的代表，那么 $\xi-x'$是$[-1,1]$中的某个有理数，譬如说 r_n，也即 ξ 属于某个 Z_n，所以 2)成立。

下面我们来证明一个反映正测度集构造特点的命题。

命题 2 设 $E\in\mathscr{L}$，$m(E)>0$，那么对任一 $\lambda\in(0,1)$，存在一个区间 $I=(a,b]$，使 $\lambda|I|<m(E\cap I)$，这里$|I|$表示区间 I 的长度。

证明：不妨设 $m(E)<\infty$，令 $0<\varepsilon<\frac{1}{\lambda}m(E)$。对 E 有$\{I_k=(a_k,b_k)\}_{k=1}^\infty$使 $E\subset\bigcup_1^\infty I_k$，$\Sigma_1^\infty|I_k|<m(E)+\varepsilon$。这时一定有某个 k_0 使 $\lambda|I_{k_0}|<m(E\cap I_{k_0})$。假设不然，对一切 k 有 $\lambda|I_k|\geqslant m(E\cap I_k)$，那么 $m(E)=m(E\cap(\bigcup_1^\infty I_k))\leqslant\Sigma_1^\infty m(E\cap I_k)\leqslant\lambda\Sigma|I_k|<\lambda(m(E)+\varepsilon)<m(E)$，矛盾。

习　题

A 类

1. 证明[0,1]中 Cantor 集的 L—测度是零。

2. 设 $g(x):\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 是单调增加右连续函数，$\mathscr{L}^g$ 是关于 g 的勒贝格—斯蒂阶可测集类，μ_g 是 $\mathscr{L}^g$ 上的勒贝格—斯蒂阶测度。证明当开集 $O=\bigcup(a_j,b_j)$（$\{(a_j,b_j)\}$ 是 O 的构成区间全体）时，$\mu_g(O)=\Sigma g(b_j^-)-g(a_j)$。

3. 1）视 $f(x)=x^3$ 为 $(-\infty,\infty)\to(-\infty,\infty)$ 的映照。证明 f 把直线上勒贝格可测集（零测集）映成勒贝格可测集（零测集）；

2）视 $f(x)=x^2$ 为 $(-\infty,\infty)\to(-\infty,\infty)$ 的映照。证明对于 $f(x)$，(1)中的结论也成立。

4. 设 $g(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上单调增加右连续函数。证明 $g(x)$ 能够产生出勒贝格可测集类 $\mathscr{L}$ 上的测度 μ_g，并且存在常数 α，对一切 $E\in\mathscr{L}$，$\mu_g(E)=\alpha m(E)$ 成立的充要条件是 $g(x)=\alpha x+c$，这里 c 是常数。

5. 设 μ_g 是波雷耳集类 $\mathscr{B}$ 上的勒贝格—斯蒂阶测度，而且对任何实数 α，总有

$$\mu_g(\tau_\alpha E)=\mu_g(E),E\in\mathscr{B}$$

证明必存在非负数 c，使得对一切 $E\in\mathscr{B}$，$\mu_g(E)=cm(E)$。

6. 设在[0,1]上有可测集 $A_1,\cdots,A_n$，满足条件 $\Sigma_1^n m(A_i)>n-1$，那么 $\bigcap_1^n A_i$ 必有正测度。

7. 设 $g_1(x),g_2(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上处处可微，并且 $0\leqslant\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g_1(x)\leqslant\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g_2(x)$ 处处成立。证明 μ_{g_2}—零测集必是 μ_{g_1}—零测集。

8. 举例说明定理 2 中的开集不能换为闭集。

B 类

1. 定义，设 E 是 R 上的 L—可测集，$x_0\in E$。又设 (a,b) 是包含 x_0 的任一开区间。如果下列极限存在

$$d=\lim_{(a,b)\to x_0}\frac{m((a,b)\cap E)}{b-a},$$

那么称 d 是 E 在点 x_0 的密度。显然 $0\leqslant d\leqslant 1$。如果 $d=1$，称 x_0 是 E 的全密点。

1）点 a 是否是 $E=[a,b]$ 的有密度的点？

2）作一个集 E，使它在给定点 x_0 有密度，并且密度等于事先给定的值 $c\in(0,1)$。

2. 对勒贝格—斯蒂阶测度讨论题 1 的结论。

3. 设 E 是 R 上的勒贝格—斯蒂阶可测集，并且 $\mu_g(E)\neq 0$。证明对任何 $c\in(0,1)$，必存在 (a,b)，使

$$\frac{\mu_g(E\cap(a,b))}{b-a}>0。$$

4. 试作一个波雷耳集 E，使对任何开区间 (a,b) 都有 $m(E\cap(a,b))>0, m(E^c\cap(a,b))>0$。

5. 令 $\mathscr{O}$ 是直线上开集全体，$\mathscr{F}$ 是直线上有界闭集全体，作 $\mathscr{O}\cup\mathscr{F}$ 上的集函数 μ 如下：当 $\{(a_j,b_j)\}$ 是互不相交的开区间时，

$$\mu(\bigcup_j(a_j,b_j))=\Sigma_j(b_j-a_j)。$$

当 $F\in\mathscr{F}$ 时，如果 $F\subset(a,b)$，那么规定 $\mu(F)=b-a-\mu((a,b)-F)$。对一切直线上的有界集 E，定义

$$\mu^*(E)=\inf\{\mu(O):E\subset O,O\in\mathscr{O}\},$$

$$\mu_*(E)=\sup\{\mu(F):F\subset E,F\in\mathscr{F}\},$$

当 $\mu^*(E)=\mu_*(E)$ 时，称 E 是可测集，令 $\mathscr{L}'$ 是可测集全体，证明 $\mathscr{L}'$ 是 $\mathscr{L}$ 中有界集全体，而且在 $\mathscr{L}'$ 上，$\mu^*=\mu_*=m$。

6. 设 E 是 R 上的 L 可测集，对每个 E，作平面上的集 $\tilde{E}=\{(x,y):-\infty<x<\infty,y\in E\}$，令 $\mathscr{R}=\{\tilde{E}:E$ 是 R 上 L—可测集$\}$，在 $\mathscr{R}$

上定义集函数 $\tilde{m}$ 如下：对直线上任何 L 可测集 E，

$$\tilde{m}(\tilde{E})=m(E)。$$

问：$\tilde{m}$ 是否是完全测度？$\mathscr{R}^*$ 是怎样的集类？

7. 设 E 是勒贝格可测集，如果对一切实数 α，$m(\tau_\alpha E\cap E)=0$，那么 $m(E)=0$。

8. 设 $A\subset[-1,1]$ 是可测集，$m(A)>1$，那么必有正测度集 $E\subset A$，使 E 关于原点对称。

9. 如果 E 是勒贝格可测集，$m(E)>0$，那么 E 必含有一个不可测子集。

10. 如果 $E\in\mathscr{L}$，$m(E)>0$，那么集 $E-E=\{x-y:x,y\in E\}$ 必含有一个关于原点对称的区间。

第五节　历史注记

函数论研究的重点是积分论。积分概念的推广是沿着两条完全不同的思想路线进行的。一条是斯蒂阶(Stieltjes，1856—1894)积分，另一条是勒贝格(Lebesgue，1875—1941)积分。因为 S 积分在数学分析中读者已经熟悉，这里只讲 L 积分，并着重介绍作为 L 积分基础的勒贝格测度概念是如何形成的。

因为不连续点的多少决定了函数的可积性，所以就提出了如何度量不连续点集“长度”的问题，而容量理论，以及后来的测度理论就是为了把长度概念扩充到直线上的非完整区间的点集而引进的。

吕蒙(Reymond)在 1882 年提出了(外)容量概念，他的基本想法是这样的，设点集 $E\subset[a,b]$，把 $[a,b]$ 分割成有限个小子区间，覆盖 E 的那些小子区间的长度之和(在逐渐缩小这些小区间长度的过程中取)的下确界称为 E 的(外)容量。外容量概念的使用仍有其局限性，为此皮亚诺(Peano，1858—1932)于 1887 年引进了区域的外容量和内容量。内容量概念是这样定义的，设 E 是一个二维区域，那么

包含在 E 内的一切多边形区域的最小上界称为 E 的内容量。外容量则取包含 E 的一切多边形的下确界。如果内外容量相等，其公共值就定义为 E 的容量。

建立在有限分割基础上的容量理论最先进的一步是约当(Jordan，1838－1922)迈出的。他关于外容量的概念叙述精确，定义如下。设 $E\subset[a,b]$，取$[a,b]$的子区间的一个有穷集合覆盖 E，那些至少含有 E 的一个点的所有子区间的长度总和的下确界定义为 E 的外容量。内容量则定义为那些只含有 E 的点的子区间的长度和的上确界。如果 E 的内外容度相等，其公共值就定义为 E 的容量。通过用矩形和其他高维类似物代替小区间，约当把容量概念推广到了 n 维空间的点集。他还证明了容量的有限可加性。

虽然约当的容量理论比他的前人优越，但也不能令人满意。按照他的定义，一个有限开集不一定有容量，包含在一个有界区间里的有理点集也没有容量。

容量理论的下一步是波雷耳(Borel，1871－1956)作出的。他利用康托证明的开集的构造定理，定义一个开集的测度是其所有构成区间长度之和。然后他定义可数个不相交可测集的并集的测度为各可测集测度之和，并且定义了两个可测集差的测度。他还考虑了零测集。波雷耳的测度论是对约当容量理论的一个改进，但还不是最终形式。现在认为已成定形的测度和积分的推广是由波雷耳的一个学生勒贝格作出的。

勒贝格 1875 年生于法国的博韦，1941 年卒于巴黎。他的父亲是一名印刷厂职工，酷爱读书，颇有教养。在父亲的影响下，勒贝格勤奋好学，成绩优秀，特别擅长计算。1894 年他考入了巴黎高等师范学校，五年后大学毕业在校图书馆工作两年。其间波雷耳论述点集测度的《函数论讲义》出版了。这些崭新的成功的研究工作激发了勒贝格的激情，从 1899 年至 1902 年他任教于一所中学，工作之余他孜孜不倦地研究实变函数论，并于 1902 年发表了论文《积分・长度与面积》，第一次叙述了他关于测度和积分的思想。他的工作替代了 19 世

纪的创造，特别是改进了波雷耳的测度论。

勒贝格测度是这样定义的。设 E 是$[a,b]$中的一个集合，$\{d_i\}$是(有限或可列个)其并包含 E 的一族开区间，用$|d_i|$表示 d_i 的长度，所有可能的$\{d_i\}$的 $\Sigma|d_i|$的下确界称为 E 的外测度，记为 $m_e(E)$。$b-a$ 与 E 在$[a,b]$中的余集的外测度的差称为 E 的内测度，记为 $m_i(E)$。如果 $m_e(E)=m_i(E)$，那么称 E 是可测的，E 的测度就是这个公共值。勒贝格还证明了测度的可列可加性。

从测度的定义可知，一切约当可测集都是勒贝格可测的，并且有相同的测度。而勒贝格可测集与波雷耳可测集的区别在于勒贝格可测集是波雷耳可测集再加上勒贝格意义下的零测度集。

有了可测集和测度的概念，勒贝格又定义了可测函数、勒贝格积分，并且建立了我们将在第三章介绍的 L 积分理论。

勒贝格的工作是 20 世纪的一个伟大贡献，赢得了公认，但也并不是没有遭到反对。厄米(Hermite，1822—1901)反对没有导数的函数，他曾试图阻止勒贝格讨论不可微曲面的论文(1899)的发表。许多年以后，勒贝格曾写道：“因为厄米表现出来的恐惧和厌恶差不多每个人都会感觉到，所以任何时候，只要当我试图加入一个数学讨论时，总会有些分析学者说：‘这不会使你感兴趣的，我们是在讨论有导数的函数’。”

第三章 积 分

在引言中我们曾经提到过函数 f 在区间$[a,b]$上(R)可积的充要条件是

$$\lim_{\lambda(D)\to 0}\Sigma_1^n\omega_i\Delta X_i=0。\tag{1}$$

当 f 在$[a,b]$上连续时，对 $\varepsilon>0$，只要 $\lambda(D)$充分小就有

$$\omega_i<\varepsilon,\tag{2}$$

从而使(1)成立。如果 f 在$[a,b]$上不连续，那么(2)未必成立，因此(1)也未必成立。如何克服这个困难呢？我们可以采用一种新的分割方法，即不分割定义域，而是分割值域。

设 $R(f)\subset[-N,N]$，对$[-N,N]$给一个分划

$$D:-N=y_0<y_1<\cdots<y_n=N,$$

令

$$E_i=\{x\in[a,b]:y_{i-1}<f(x)\leqslant y_i\},$$

如果 $\mu(E_i)$有定义，那么就可以定义新的积分大和数、小和数

$$\overline{S}(D)=\Sigma_1^n y_i\mu(E_i),\quad \underline{S}(D)=\Sigma_1^n y_{i-1}\mu(E_i)。$$

易见

$$|\overline{S}(D)-\underline{S}(D)|\leqslant\lambda(D)\Sigma_1^n\mu(E_i)$$
$$=\lambda(D)\mu([a,b]),$$

由此

$$\lim_{\lambda(D)\to 0}(\overline{S}(D)-\underline{S}(D))=0。$$

这表明 f 按这种新的方法是可以积分的。由此可见，要讨论这种新的积分，就要讨论那种使 E_i 可测的函数。

第一节 可测函数

本节我们将给出可测函数的定义,并讨论可测函数及可测函数列的性质。

定义 1 设$(X,\mathscr{R})$是一个可测空间,$E\subset X$,函数$f:E\to \boldsymbol{R}$称为E上的$\mathscr{R}$可测函数,如果对任一$a\in \boldsymbol{R}$,$E(a\leqslant f)\in\mathscr{R}$。这时也简称$f$是$E$上的可测函数。

例 1 闭区间$[a,b]$上的连续函数是$([a,b],\mathscr{L})$可测的,这是因为对任一$\alpha\in \boldsymbol{R}$,集合$\{x\in[a,b]:f(x)\geqslant\alpha\}$是一个闭集合。同样可以证明开区间$(a,b)$上的连续函数也是$((a,b),\mathscr{L})$可测的。

定理 1 设$(X,\mathscr{R})$是可测空间,$E\subset X$,$f:E\to \boldsymbol{R}$,

1)如果f在E上可测,那么E是可测集;

2)如果f在E上可测,F是E的可测子集,那么f在F上可测;

3)设$E=E_1\cup E_2$,E_1、E_2是可测集,那么f在E上可测当且仅当f在E_1、E_2上可测;

4)如果$\mathscr{R}$是一个σ-代数,那么χ_E是X上的可测函数当且仅当E是可测集。

证明:1)因为$E=\bigcup_1^\infty E(-n\leqslant f)$,而$E(-n\leqslant f)\in\mathscr{R}$。

2)因为$F(c\leqslant f)=E(c\leqslant f)\cap F$。

3)必要性得自2);充分性得自等式$E(c\leqslant f)=E_1(c\leqslant f)\cup E_2(c\leqslant f)$。

4)易见

$$X(c\leqslant\chi_E(x))=\begin{cases}\varnothing & c>1,\\ E & 1\geqslant c>0,\\ X & 0\geqslant c。\end{cases}$$

因为$\mathscr{R}$是σ-代数,所以X是可测集,因此$X(c\leqslant\chi_E)$可测当且仅当E可测。

定理 2 函数f在E上可测当且仅当下列条件之一成立。

1)对任何 $a\in\boldsymbol{R}$,$E(f<a)\in\mathscr{R}$;

2)对任何 $a\in\boldsymbol{R}$,$E(f\leqslant a)\in\mathscr{R}$;

3)对任何 $a\in\boldsymbol{R}$,$E(f>a)\in\mathscr{R}$。

证明:我们证明 f 可测$\Rightarrow$1)$\Rightarrow$2)$\Rightarrow$3)$\Rightarrow f$ 可测。

f 可测$\Rightarrow$1)。因为 $E(f<a)=E-E(f\geqslant a)\in\mathscr{R}$。

1)$\Rightarrow$2)。因为 $E(f\leqslant a)=\bigcap_1^\infty E(f<a+\frac{1}{n})\in\mathscr{R}$。

2)$\Rightarrow$3)。因为 $E(f>a)=E-E(f\leqslant a)\in\mathscr{R}$。

3)$\Rightarrow f$ 可测。因为 $E(a\leqslant f)=\bigcap_1^\infty E(a-\frac{1}{n}<f)\in\mathscr{R}$。

注 1 我们指出定义 1 对可以取值$\pm\infty$的函数也是适用的,也即虽然函数值可以为$\pm\infty$,但是定义中的常数 a 仍可限制为有限数。这是因为

$E(f=+\infty)=\bigcap_1^\infty E(f>n)\in\mathscr{R}$,

$E(f=-\infty)=\bigcap_1^\infty E(f<n)\in\mathscr{R}$。

对于扩充了的实数系 $\overline{\boldsymbol{R}}=[-\infty,\infty]$,我们规定

$x\pm\infty=\pm\infty$ 对 $x\in\boldsymbol{R}$,$\infty+\infty=\infty$,$-\infty-\infty=-\infty$,

$x\cdot(\pm\infty)=\pm\infty$ 对 $0<x<+\infty$,

$x\cdot(\pm\infty)=\mp\infty$ 对$-\infty<x<0$,

$0\cdot(\pm\infty)=0$。

现在我们来考虑可测函数列的极限。

定理 3 设$\{f_n\}$是 E 上的一个可测函数列,那么 $\inf f_n$,$\sup f_n$,$\underline{\lim} f_n$,$\overline{\lim} f_n$ 都在 E 上可测,如果 $f(x)=\lim f_n(x)$在 E 上存在,那么 f 也在 E 上可测。

证明:因为对任一 $a\in\boldsymbol{R}$ 有 $E(\sup f_n>a)=\bigcup_1^\infty E(f_n>a)\in\mathscr{R}$,$E(\inf f_n<a)=\bigcup_1^\infty E(f_n<a)\in\boldsymbol{R}$,所以 $\inf f_n$,$\sup f_n$ 可测。令$b_n(x)=\inf\limits_{j>n} f_j(x)$,易见 $b_n(x)$是可测函数,而$\underline{\lim} f_n=\sup\limits_{n\geqslant 1} b_n(x)$,因此也是可测函数。类似地可证$\overline{\lim} f_n$ 是可测函数。如果 $f=\lim f_n$ 存在,那么 $f(x)=\underline{\lim} f_n(x)=\overline{\lim} f_n(x)$,因此也是可测的。

推论 1　如果 f、g 在 E 上可测，那么 $\max\{f,g\}$、$\min\{f,g\}$ 都在 E 上可测。

定义 2　设 $f:X\to\overline{R}$，定义

$f^+(x)=\max\{f(x),0\}$，

$f^-(x)=\max\{-f(x),0\}$，

分别称为 f 的正部和负部。

易见 $f=f^+-f^-$，如果 f 可测，那么 f^+，f^- 也可测。

定义 3　只取有限个值的可测函数称为简单函数。

易见 f 是简单函数当且仅当 $f(x)=\Sigma_1^n d_i\chi_{E_i}$，其中 E_i 是两两不相交的可测集。事实上，如果 $R(f)=\{\alpha_i\}_1^n$，不妨设 $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n$，记 $E_i=E(f\leqslant\alpha_i)\cap E(f>\alpha_{i-1})$，那么 E_i 可测，两两不交，且 $f(x)=\Sigma_1^n d_i\chi_{E_i}$。

当 E_i 为两两不相交的区间时称 f 为阶梯函数。

命题 1　设 φ、ψ 是 E 上的两个简单函数，那么 $\varphi\pm\psi$、$\varphi\cdot\psi$、φ/ψ（如果 $\psi(x)\neq0$）也是简单函数。

证明：我们仅证 $\varphi+\psi$ 是简单函数，其余作为习题留给读者。设 $\varphi=\Sigma_1^n\alpha_i\chi_{E_i}$，$\psi=\Sigma_1^m\beta_j\chi_{F_j}$，那么 $\varphi+\psi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i+\beta_j)\chi_{E_i\cap F_j}$，因为 $E_i\cap F_j$ 是可测集，所以 $\varphi+\psi$ 是简单函数。

定理 4　如果 f 是 E 上的（非负）可测函数，那么存在收敛于 f 的（非负）简单函数（递增）序列 $\{\varphi_n\}$（这种收敛称为单调增收敛，简记为 $\varphi_n\uparrow f$），并且在 f 有界的集合上 φ_n 一致收敛于 f。

证明：设 $f:E\to[0,\infty]$。对 $n\in N$，$1\leqslant k\leqslant n2^n$，记

$$E_n^k=E((k-1)2^{-n}\leqslant f\leqslant k2^{-n}),F_n=E(f\geqslant n),$$

由定理 2 可知 E_n^k、F_n 是可测集。定义

$$\varphi_n(x)=\Sigma_1^{n2^n}(k-1)2^{-n}\chi_{E_n^k}+n\chi_{F_n},$$

易见对一切 n 有 $\varphi_n(x)\leqslant\varphi_{n+1}(x)\leqslant f(x)$，并且对 $f(x)\leqslant n$ 有 $0\leqslant f(x)-\varphi_n(x)\leqslant 2^{-n}$。对任一 $x\in E$，有 $n_0\in N$ 使 $f(x)\leqslant n_0$，因此当 $n\geqslant n_0$ 时有 $|f(x)-\varphi_n(x)|<2^{-n}$，也即 $\varphi_n(x)\to f(x)$。记 $F=\{x\in E:f$

$(x)\leqslant k\in N\}$，那么当 $n\geqslant k$ 时，$|f(x)-\varphi_n(x)|\leqslant 2^{-n}$ 在 F 上一致成立，因此在 F 上 φ_n 一致收敛于 f。

对一般的可测函数 $f:E\to\overline{R}$，只要考虑 f^+，f^- 可得简单函数列 $\{\varphi_n\}$、$\{\psi_n\}$，使 $\{\varphi_n\}\uparrow f^+$，$\{\psi_n\}\uparrow f^-$，再令 $f_n=\varphi_n-\psi_n$，则 $\{f_n\}$ 满足定理要求。

定理 5 设 f、g 是两个可测函数，那么 $f\pm g$、fg、f/g（如果 $g(x)\neq 0$）也是可测函数。

证明：假设 $\{\varphi_n\}$、$\{\psi_n\}$ 是两个简单函数列，使 $f(x)=\lim\varphi_n(x)$，$g(x)=\lim\psi_n(x)$，那么 $\{\varphi_n\pm\psi_n\}$ 也是简单函数列，并且 $f\pm g=\lim(\varphi_n\pm\psi_n)$，因此 $f\pm g$ 是简单函数。类似地可以证明其他结论。

下面讨论可测函数的复合函数的可测性。为此，我们先回顾一下可测函数的定义。称 $f:X\to \boldsymbol{R}$ 是 $(X,\mathscr{R})$ 可测的，如果对任一 $a\in\boldsymbol{R}$，$X(f\geqslant a)$ 是 $\mathscr{R}$ 可测的，也即对任一波雷耳集 $[a,\infty)$，$f^{-1}([a,\infty))\in\mathscr{R}$。由此启发我们提出一种更一般的可测函数定义。设 $(X,\mathscr{M})$，$(Y,\mathscr{N})$ 是两个可测空间，映射 $f:X\to Y$ 称为 $(\mathscr{M},\mathscr{N})$ 可测的（简称为可测的），如果对任一 $F\in\mathscr{N}$，$f^{-1}(F)\in\mathscr{M}$。假设 $(Z,\mathscr{O})$ 也是可测空间，$f:X\to Y$ 是 $(\mathscr{M},\mathscr{N})$ 可测的，$g:Y\to Z$ 是 $(\mathscr{M},\mathscr{O})$ 可测的，那么映射 $g\circ f=g(f(x))$ 是 $(\mathscr{M},\mathscr{O})$ 可测的。

现在我们来分析可测的新、老定义的关系，为此先给出

命题 2 设 $(X,\mathscr{M})$、$(Y,\mathscr{N})$ 是可测空间，$\mathscr{N}$ 是由集类 $\mathscr{E}$ 生成的，那么 $f:X\to Y$ 是 $(\mathscr{M}、\mathscr{N})$ 可测的，当且仅当对任一 $F\in\mathscr{E}$，$f^{-1}(F)\in\mathscr{M}$。

证明：必要性显然。充分性。因为集类 $\{F\subset Y:f^{-1}(F)\in\mathscr{M}\}$ 是包含 $\mathscr{E}$ 的 σ-环，它必然包含 $\mathscr{N}$。

推论 2 设 $(X,\mathscr{R})$ 是一个可测空间，那么

1）函数 $f:X\to\boldsymbol{R}$ 是 $\mathscr{R}$ 可测的，当且仅当 f 是 $(\mathscr{R},\mathscr{B})$ 可测的，这里 $\mathscr{B}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上波雷耳集的全体。设 $E\subset X$，$f:E\to\boldsymbol{R}$ 在 E 上可测，当且仅当对任一 $F\in\mathscr{B}$，$f^{-1}(F)\cap E\in\mathscr{R}$；

2）$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 是勒贝格—斯蒂阶（波雷耳）可测的当且仅当 f 是

$(\mathscr{L}^g,\mathscr{B})((\mathscr{B},\mathscr{B}))$可测的。

3)任一连续函数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 是$((\mathscr{B},\mathscr{B}))$可测的。

证明：推论中前两个结论的充分性是显然的。1)、2)的必要性：因为 $f^{-1}([a,\infty))\in\mathscr{R}(\mathscr{L}^g)$，而 $\mathscr{B}$ 是由集类$\{[a,\infty):a\in\boldsymbol{R}\}$生成的，由命题 2 立即推出 f 是$(\mathscr{R},\mathscr{B})(\mathscr{L}^g,\mathscr{B})$可测。3)的证明：由定理 Ⅰ.4.8.3，$f^{-1}((a,\infty))$是开集，从而是波雷耳集，再用上面的推理即得 f 是$(\mathscr{B},\mathscr{B})$可测的。

现在我们来考察两个勒贝格可测函数的复合函数的可测性。设 $f,g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 是勒贝格可测的，对任一 $\alpha\in\boldsymbol{R}$，有

$$\{x:g\circ f(x)>\alpha\}=\{x:f(x)\in g^{-1}((\alpha,\infty))\}$$
$$=\{x:x\in f^{-1}(g^{-1}(\alpha,\infty))\}。$$

因此，如果 $g^{-1}((\alpha,\infty))\in\mathscr{B}$，那么 $g\circ f$ 是勒贝格可测的。

下面我们讨论勒贝格可测函数的构造，为此先引入

定义 4 设 $E\subset\boldsymbol{R}$，$f:E\to\boldsymbol{R}$，$x_0\in E$。如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap E$ 时，有

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，

那么称 f 在 x_0 连续。如果 f 在 E 上任何一点都连续，那么称 f 在 E 上连续。如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $x,x'\in E$，并且 $|x-x'|<\delta$ 时有 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$，那么称 f 在 E 上一致连续。

不难证明，如果函数列$\{f_n(x)\}$在 E 上连续，并且 $f_n(x)$在 E 上一致收敛于 $f(x)$，那么 $f(x)$在 E 上连续。

例 2 区间$[0,1]$上的狄里希莱函数 $f(x)$在$[0,1]$中的任意一点都不连续，但是如果用 E 表示$[0,1]$中的无理点集(或有理点集)，那么 $f(x)$作为 E 上的函数是连续的。

例 3 设 $F_1,\cdots,F_n$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上 n 个两两不交闭集，$F=\bigcup_1^n F_i$，那么 $f(x)=\sum_1^n\alpha_i\chi_{F_i}$是 F 上的连续函数。

证明：设 $x\in F$，那么 x 必属于，而且只属于某个 F_{i_0}。我们证明存在某个 $\delta>0$，当 $x'\in F$，并且 $|x'-x|<\delta$ 时，$x'\in F_{i_0}$。否则对任一 $n\in N$，有 $x_n\in F$，$|x_n-x|<1/n$，而 $x_n\overline{\in}F_{i_0}$。于是可以取出一个子列

$\{x'_n\}$含于某个F_k，而$k\neq i_0$。因为F_k是闭集，并且$x'_n\to x$，因此$x\in F_k$，矛盾。假设当$|x'-x|<\delta$时，$x'\in F_{i_0}$，那么$f(x')-f(x)=\alpha_{i_0}-\alpha_{i_0}=0$，因此$f$在$x$连续。

定理 6(鲁金(Лузин)定理) 设$E\subset \boldsymbol{R}$，$f:E\to \boldsymbol{R}$是E上勒贝格—斯蒂阶可测函数，那么对任意$\delta>0$，存在E的闭子集F_δ，使$\mu_g(E-E_g)<\delta$，f是F_δ上的连续函数。

证明：对$n\in N$，作可测集

$$E_{nk}=E\left(\frac{k-1}{n}\leqslant f<\frac{k}{n}\right),k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots。$$

显然当$k\neq k'$时，$E_{nk}\cap E_{nk'}=\varnothing$，并且$E=\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}E_{nk}$，因此$\mu_g(E)=\Sigma_{-\infty}^{\infty}\mu_g(E_{nk})$。

如果$\mu_g(E)<\infty$，那么存在$k_n\in N$使$\left(\Sigma_{k=-\infty}^{-k_n-1}+\Sigma_{k=k_n+1}^{+\infty}\right)\mu_g(E_{nk})<\delta/2^{n+1}$。对$|k|\leqslant k_n$，作闭集$F_{nk}\subset E_{nk}$，使

$$\Sigma_{-kn}^{kn}\mu_g(E_{nk}-F_{nk})<\delta/2^{n+1}。$$

记$F_n=\bigcup_{-kn}^{kn}F_{nk}$，那么$E-F_n=\left(\bigcup_{k=-\infty}^{-k_n-1}E_{nk}\right)\cup\left(\bigcup_{k=k_n+1}^{+\infty}E_{nk}\right)\cup\left(\bigcup_{k=-kn}^{kn}(E_{nk}-F_{nk})\right)$，因此

$$\mu_g(E-F_n)<\delta/2^n。$$

在F_n上定义函数$f_n=\Sigma_{-k_n}^{+k_n}\frac{k-1}{n}\chi_{F_{nk}}$。由例 3 可知$f_n$是$F_n$上的连续函数，由$f_n$的定义可知当$x\in F_n$时

$$0\leqslant f(x)-f_n(x)\leqslant\frac{1}{n}。$$

令$F_\delta=\bigcap_1^\infty F_n$，我们证明在$F_\delta$上$f_n$一致收敛于$f$。事实上，对任意的$\varepsilon>0$，存在$n_0$使$1/n_0<\varepsilon$。因为$F_\delta\subset F_n$，因此当$n\geqslant n_0$时

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon。$$

这样一致收敛性得证，从而f在F_δ上连续。易见

$$\mu_g(E-E_\delta)=\mu_g(\bigcup_1^\infty(E-F_n))\leqslant\Sigma_1^\infty\mu_g(E-F_n)<\delta。$$

对于$\mu_g(E)=\infty$的情形请读者自证。

引理 1 设F是直线$\boldsymbol{R}$上的闭集，函数f在F上连续，那么f

必可延拓为直线 $\boldsymbol{R}$ 上的连续函数。

证明：我们定义一个新函数 h。对 $x\in F$，令 $h(x)=f(x)$。设 $F^c=\bigcup(\alpha_i,\beta_i)$，对 $x\in(\alpha_i,\beta_i)$ 我们分几种情形来证明。如果 (α_i,β_i) 是有限区间，那么 $\alpha_i,\beta_i\in F$，定义

$$h(x)=f(\alpha_i)\frac{\beta_i-x}{\beta_i-\alpha_i}+f(\beta_i)\frac{x-\alpha_i}{\beta_i-\alpha_i}。$$

如果 $\alpha_i=-\infty,\beta_i\in F$，那么令 $h(x)=f(\beta_i)$。如果 $\alpha_i\in F,\beta_i=+\infty$，那么令 $h(x)=f(\alpha_i)$。我们来证明 $h(x)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上连续。显然 F^c 中的每个点都是 h 的连续点，因此只要证明 F 中的点也是 h 的连续点。设 $x_0\in F$，因为 f 在 F 上连续，对 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap F$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon。$$

如果 $(x_0-\delta,x_0)$ 不含 F 的点，也即 x_0 是 F^c 的某个构成区间 (α_i,β_i) 的右端点，那么 $h(x)$ 在 (α_i,β_i) 上是线性函数，所以存在 $\eta>\alpha_i$，当 $x\in(\eta,x_0)$ 时 $|h(x)-h(x_0)|<\varepsilon$。如果 $(x_0-\delta,x_0)$ 中含有 F 的点，例如 η'，那么可以分两种情形。

情形 1. 当 $x\in(\eta',x_0)\cap F$ 时，$h(x)=f(x)$，$h(x_0)=f(x_0)$，因此 $|h(x)-h(x_0)|<\varepsilon$。

情形 2. 当 $x\in(\eta',x_0)-F$ 时，必有 F 的余区间 $(a_i,b_i)\subset(\eta',x_0)$。由于 $\alpha_i,\beta_i\in(\eta',x_0)\cap F$，所以有

$$|h(a_i)-h(x_0)|<\varepsilon,$$
$$|h(b_i)-h(x_0)|<\varepsilon。$$

因为 h 在 (a_i,b_i) 上是线性的，所以 $|h(x)-h(x_0)|<\varepsilon$。这表明 h 在 x_0 左连续。同样可证 h 在 x_0 右连续，因此 x_0 是 h 的连续点。

定理 7 设 $E\subset\boldsymbol{R}$，f 是 E 上勒贝格—斯蒂阶可测函数，那么对 $\delta>0$，有 $\boldsymbol{R}$ 上的连续函数 h，使 $\mu_g(E(f\neq h))<\delta$。如果在 E 上 $|f|\leqslant M$，那么可选择 h 使 $|h|\leqslant M$。

证明：对 $\delta>0$，存在闭集 $F_\delta\subset E$ 使 $\mu_g(E-E_\delta)<\delta$，f 在 F_δ 上连续。把 f 延拓成直线上的连续函数 h，那么 $E(f\neq h)\subset E-F_\delta$，因此

$\mu_g(E(f\neq h))<\delta$。当$|f|\leqslant M$时，由h的构造可知$|h|\leqslant M$。

习　题

A　题

1. 设$(X,\mathscr{R})$是可测空间，$E\subset X$，f是E上可测函数。证明：对任何实数α，$E(f=\alpha)$是可测集。

2. 设$(X,\mathscr{R})$是可测空间，$E_1,\cdots,E_n$是有限个可测集。证明：f在$E=\bigcup_1^n E_i$上是可测的充要条件是f在每个$E_i(i=1,2,\cdots,n)$上是可测的，再证上述命题对于$\{E_j\}$是一列可测集也是正确的。

3. 设$(X,\mathscr{R})$是可测空间，$E\subset X$，证明f是E上有界可测函数的充要条件是对一切有理数r，$E(f\geqslant r)$是可测集。

4. 证明如果$f(x)$在可测集E上连续，那么$f(x)$为E上可测函数。

5. 设$E\subset \boldsymbol{R}$，f在E上勒贝格可测，h是$\boldsymbol{R}$上勒贝格可测函数，问$h(f)$是否是E上勒贝格可测函数。

6. 设f是$E\subset\boldsymbol{R}$上有限函数，并且关于$(\boldsymbol{R},\mathscr{L}^g)$是可测的，证明存在$\boldsymbol{R}$上的波雷耳可测函数$h$，使$\mu_g(E(f\neq h))=0$。

7. 设f是$\boldsymbol{R}$上勒贝格(波雷耳)可测函数，a是任一常数。证明$f(ax)$是$\boldsymbol{R}$上勒贝格(波雷耳)可测函数。

8. 设f是$\boldsymbol{R}$上勒贝格(波雷耳)可测函数，证明$f(x^2)$，$f(x^3)$，$f(\frac{1}{x})$(当$x=0$时，规定$f(\frac{1}{0})=0$)都是勒贝格(波雷耳)可测函数。

B　类

设$(X,\mathscr{R})$是可测空间，

1. 设$f:X\to\overline{\boldsymbol{R}}$，$Y=f^{-1}(\boldsymbol{R})$。那么$f$是可测的当且仅当$f^{-1}(\{-\infty\})\in\mathscr{R}$，$f^{-1}(\{\infty\})\in\mathscr{R}$，并且$f$在$Y$上是可测的。

2. 如果$\{f_n\}$是X上可测函数列，那么$\{x:\lim f_n(x)\text{存在}\}\in\mathscr{R}$。

3. 举例说明 $\overline{\boldsymbol{R}}$—值可测函数的不可数族的上确界函数可能不是可测的。

4. 设对任一 $\alpha\in\boldsymbol{R}$ 给定一个集 $E_\alpha\in\mathscr{R}$，使当 $\alpha<\beta$ 时，$E_\alpha\subset E_\beta$，$\bigcup_{\alpha\in R}E_\alpha=X$，$\bigcap_{\alpha\in R}E_\alpha=\varnothing$，那么有可测函数 $f:X\to\boldsymbol{R}$ 使在 E_α 上有 $f(x)\leqslant\alpha$，在 E_α^c 上有 $f(x)\geqslant\alpha$。

5. 定义：在康托集 K 上定义一个函数 f：$f(x)=\Sigma_j\dfrac{a_j}{2^{j+1}}$，这里 $x=\Sigma a_j3^{-j}$，如果 $x\in[0,1]-K$，那么 x 必属于 K 的某一个余区间，我们定义 $f(x)=f$ 在该余区间端点的值，这样定义的函数称为康托函数，令 $g(x)=f(x)+x$。证明

1)g 是从$[0,1]$到$[0,2]$的一个双射，$h=g^{-1}$是从$[0,2]$到$[0,1]$的连续函数；

2)如果 K 是康托集，那么 $m(g(K))=1$；

3)$g(K)$含有一个勒贝格不可测集 A，设 $B=g^{-1}(A)$，那么 B 是勒贝格可测的，但不是波雷耳可测的；

4)存在 $\boldsymbol{R}$ 上的一个勒贝格可测函数 f 和一个连续函数 g，使 $f\circ g$不是勒贝格可测的。

6. 1)当 f 是$[a,b]$上的连续函数，单调函数，阶梯函数时，f 必是$[a,b]$上的波雷耳可测函数，

2)当 f 在 $\boldsymbol{R}$ 上处处可微时，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$必是 $\boldsymbol{R}$ 上的波雷耳可测函数。

7. 设 X 是一个集，$\{f_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是定义在 X 上的一族有限实函数，$\mathscr{R}$ 是由 X 的某些子集生成的 σ-环，证明 $\mathscr{R}$ 是使得一切 $f_\lambda(\lambda\in\Lambda)$都可测的最小 σ-代数的充要条件是 $\mathscr{R}$ 是包含一切 $X(r<f_\lambda)(\lambda\in\Lambda)$的最小 σ-代数，这里 r 取遍有理数。

8. 当 $\mu(E)=\infty$时，证明鲁金定理成立。

9. 将鲁金定理中的连续函数换为多项式，成立不成立？为什么？将 δ 换为零结论对不对？为什么？

第二节　几乎处处收敛与依测度收敛

在第一节我们讨论了可测函数列的逐点收敛，本节将讨论几种新的收敛概念。

定义 1　设$(X,\mathscr{R},\mu)$是一个测度空间，$E\subset X$，P是一个与x有关的命题。如果存在一个零测集E_0，使P在$E-E_0$上处处成立，那么说P在E上几乎处处成立。如果$\{f_n\}$是E上可测函数列，$f_n\to f$在E上几乎处处成立，那么称f_n在E上几乎处处收敛于f，记为

$$f_n\underset{E}{\dot{\to}}f \text{ 或者 } f\dot{\to}f。$$

注 1　定义中的E_0未必是E的子集，E也未必是可测集，所以命题P在E上几乎处处成立，就是E中使命题P不成立的点集是某个零测度集的子集。当E可测时，$E\cap E_0$也可测，此时可认为使命题P不成立的点集是E的零测度子集。

定理 1　设μ是可测空间$(X,\mathscr{R})$上的完全测度。

1)如果f在E上可测，g是E上的函数，使$g\doteq f$，那么g在E上可测；

2)如果f_n在E上可测，f是E上的函数，$f_n\underset{E}{\dot{\to}}f$，那么$f$在$E$上可测。

证明：1)因为f在E上可测，所以$E\in\mathscr{R}$。又因为$g\doteq f$，所以有$E_0\in\mathscr{R}$，$\mu(E_0)=0$，在$E-E_0$上$g=f$。因为$E-E_0$是E的可测子集，所以f在$E-E_0$上可测，从而$(E-E_0)(g\leqslant c)=(E-E_0)(f\leqslant c)$可测。而$E(g\leqslant c)=(E-E_0)(g\leqslant c)\cup(E\cap E_0)(g\leqslant c)$，其中$(E\cap E_0)(g\leqslant c)$是零测度集$E_0$的子集，也是可测的，所以$E(g\leqslant c)$是可测集，从而$g$在$E$上可测。

2)设$E_0\in\mathscr{R}$，$\mu(E_0)=0$，在$E-E_0$上f_n可测，并且$f_n(x)\to f(x)$，所以f在$E-E_0$上可测。而$E\cap E_0(f<c)$是E_0的子集，也是可测的，因此f在E_0上可测，从而在E上可测。

对于不完全测度有下面的定理。

定理 2 设$(X,\mathscr{R},\mu)$是一个测度空间，$\{f_n\}$是 E 上的可测函数列。

1)如果$\{f_n\}$在 E 上几乎处处收敛，那么必存在 E 上的可测函数 f，使 $f_n \dot{\rightarrow} f$；

2)设 g 是 E 上的函数，如果 $f_n \underset{E}{\dot{\rightarrow}} g$，那么必存在 E 上的可测函数 f，使 $f \underset{E}{\dot{=}} g$。

证明：1)设 $E_0 \in \mathscr{R}$，$\mu(E_0)=0$，记 $f_0(x)=\lim f_n(x)$，它在 $E-E_0$ 上处处存在，并且由定理 1.3，f_0 是可测的。在 E 上定义函数

$$f(x)=\begin{cases} f_0(x) & x \in E-E_0, \\ 0, & x \in E \cap E_0. \end{cases}$$

由定理 1.1 可知，f 是 E 上的可测函数，并且 $f_n \underset{E}{\dot{\rightarrow}} f$。

2)定义 E_0、f 同 1)。f_n 在 $E-E_0$ 上处处收敛于 f，因此这个极限函数几乎处处等于 g。于是有零测度集 $E_1 \subset E-E_0$ 使在 $E-(E_0 \cup E_1)$上 $f_n \rightarrow g$，从而在 $E-(E_0 \cup E_1)$上 $f=g$。而 $\mu(E_0 \cup E_1)=0$，所以 $f \underset{E}{\dot{\rightarrow}} g$。

注 2 对于定理 2 应该强调的是如果 $g(x) \underset{E}{\dot{=}} \lim f_n(x)$，那么 g 未必可测。这是因为 $E(g>c)=(E-E_0)(g>c) \cup (E \cap E_0)(g>c)$，在 $E-E_0$ 上 $g=f_0$，因此$(E-E_0)(g>c)=(E-E_0)(f_0>c)$，它是可测集。而$(E \cap E_0)(g>c)$虽是零测度集的子集，但是因为 μ 不是完全测度，$(E \cap E_0)(g>c)$未必可测。

例 1 在区间$[0,1]$上定义函数列 $f_n(x)=\chi_{[j2^{-k},(j+1)2^{-k}]}$，其中 $0 \leqslant j \leqslant 2^k$，$n=j+2^k$。不难看出$\{f_n\}$不是几乎处处收敛于零，但是 $\mu(\{x \in [0,1]: f_n(x) \neq 0\})=2^{-k} \rightarrow 0$。

为了描述这种新的收敛现象，我们引入

定义 2 设$(X,\mathscr{R},\mu)$是测度空间，$E \in \mathscr{R}$，$\{f_n\}$是 E 上的可测函数列，假如有一个 E 上的有限可测函数 f，使对任何 $\delta>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\mu(E(|f_n-f|>\delta))=0,$$

那么称$\{f_n\}$在 E 上依测度 μ 收敛于 f,或简言之为$\{f_n\}$测度收敛于 f,记为

$$f_n\overset{\mu}{\underset{E}{\Rightarrow}}f \quad 或者 \quad f_n\underset{\mu}{\Rightarrow}f。$$

例 2 在区间$(0,1)$上定义函数 $f_n(x)=x^n$,它在$[0,1)$上点点收敛于零,测度收敛于零,不一致收敛于零。但是对任一 $\delta\in(0,1)$,在$[0,1-\delta]$上 f_n 一致收敛于零。

受这个例子启发,我们引入

定义 3 设$(X,\mathscr{R},\mu)$是一个测度空间,$E\in\mathscr{R}$,$\{f_n\}$是 E 上的可测函数列,如果对任一 $\delta>0$,存在一个可测子集 $F\subset E$,使 $\mu(E-F)<\delta$,在 F 上 f_n 一致收敛于 f,那么称$\{f_n\}$近似一致收敛于 f,记为

$$f_n\overset{a}{\Rightarrow}f。$$

显然近似一致收敛蕴含依测度收敛,两者的差别在于近似一致收敛性中使一致收敛不成立的点集是固定的,而在测度收敛中这个点集是不固定的。

命题 1 设 $\mu(E)<\infty$,$\{f_n\}$是 E 上的可测函数列,满足条件

1) $f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$ 对 $n=1,2,\cdots$,

2) $f(x)=\lim f_n(x)$ 对 $x\in E$,

那么$\{f_n\}$在 E 上近似一致收敛于 f。

证明:由条件 2)可知 f 是 E 上可测函数,对任意的 $k\in N$ 定义

$$E_n^k=E(|f(x)-f_n(x)|<1/k),$$

那么$\{E_n^k\}_{n=1}^{\infty}$是可测集的递增列,并且 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n^k$。因为 $\mu(E)<\infty$,可用测度的下连续性,对 $\delta>0$ 有 $N_k\in N$,当 $n\geqslant N_k$ 时 $\mu(E-E_n^k)<\delta/2^k$。令 $F=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{n_k}^k$,类似于鲁金定理的证明,有 $\mu(E-F)<\delta$,在 F 上 $f_n\Rightarrow f$。

现在我们证明命题 1 在去掉条件 1)后仍然成立,即有

命题 2 设 $\mu(E)<\infty$,$\{f_n\}$是 E 上可测函数列,处处收敛于有限函数 f,那么 f_n 在 E 上近似一致收敛于 f。

证明：同命题 1 的证明一样，f 是 E 上的可测函数，定义集合 E_n^k，并且令 $F_n^k=\bigcap_{j\geqslant n}E_j^k$，那么 $\{F_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ 是可测集的增序列，而且 $\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n^k=E$。事实上，前式左边的集是集列 $\{E_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ 的下极限集 $\underline{\lim_n}E_n^k$，由下极限集的性质（命题 I.3.1）和在 E 上 $f_n(x)\to f(x)$ 的事实可知它与 E 相等。因此有 n_k 使 $\mu(E-F_{n_k}^k)<\delta/2^k$，在 $F_{n_k}^k$ 上当 $n\geqslant n_k$ 时 $|f_n(x)-f(x)|<1/k$。令 $F=\bigcap_{k=1}^{\infty}F_{n_k}^k$，那么 $\mu(E-F)<\delta$，在 F 上 $f_n\rightrightarrows f$。

再进一步我们可以把处处收敛的条件放宽到几乎处处收敛，这就是

定理 3（叶果洛夫（Егоров）定理） 设 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 是测度空间，$E\in\mathscr{R}$，$\mu(E)<\infty$，$\{f_n\}$ 是 E 上可测函数列，在 E 上几乎处处收敛于有限函数 f，那么对任何 $\delta>0$，必定存在 E 的可测子集 E_δ，使 $\mu(E-E_\delta)<\delta$，在 E_δ 上，$\{f_n\}$ 一致收敛于 f。

证明：首先指出本定理从条件到结论都没有要求函数 f 是可测的。但是因为 E 是可测集，由注 2 可知存在零测集 $E_0\subset E$，使在 $E-E_0$ 上，$\{f_n(x)\}$ 处处收敛于 f，因此 f 在 $E-E_0$ 上可测。修改 f 的值使 $f(x)=0$，对 $x\in E_0$，那么 f 在 E 上可测。用 $(E-E_0)\cap E_\delta$ 取代 E_δ，定理的结论仍然成立，因此不失一般性可以假设 f 是 E 上可测函数。

定理本身的证明是简单的，对上述的集合 $E-E_0$ 应用命题 2 即得。

推论 1 设 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 是测度空间，$E\in\mathscr{R}$，$\mu(E)<\infty$，$\{f_n\}$ 是 E 上可测函数列，在 E 上几乎处处收敛于有限可测函数，那么 $\{f_n\}$ 依测度收敛于 f。

注 3 定理 3 中的条件 $\mu(E)<\infty$ 是不可少的，例如令 $X=(0,\infty)$，$\mathscr{R}=\mathscr{L}$，$\mu=m$，$E=X$，

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in(0,n),\\ 0 & x\in(n,\infty),\end{cases}\quad n=1,2,\cdots,$$

那么 $f_n\to 1$，但是 f_n 不近似一致收敛于 1。

注 4 对于叶果洛夫定理不能把结论加强为除掉一个测度为零的集合外，$f_n(x)$一致收敛于$f(x)$。例如令$E=[0,1]$，μ为勒贝格测度，$f_n(x)=\chi_{[\frac{1}{n+2},\frac{1}{n+1}]}$。易见$f_n$在$E$上可测，并且$\lim f_n(x)=0$在$E$上处处成立。假设$E_0$为$[0,1]$的一个零测度子集，在$E-E_0$上$f_n\Rightarrow 0$，那么对任一$\varepsilon>0$，有$N\in N$，使当$n\geqslant N$时有$|f_n(x)|<\varepsilon$在$E-E_0$上成立。但是对不论多大的$N$，令$A=\left[\frac{1}{N+4},\frac{1}{N+3}\right]-E_0$，那么$m(A)=\frac{1}{(N+3)(N+4)}>0$，对$x\in A$有$|f_{N+2}(x)|=\chi_{[\frac{1}{N+4},\frac{1}{N+3}]}=1$，矛盾。

如果函数$f(x)$在x_0点存在有限导数，那么

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\to f'(x_0)。$$

如果$f(x)$在区间(a,b)上几乎处处有有限导数，记

$$f_{\Delta x}(x)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

那么函数族$\{f_{\Delta x}(x)\}$当$\Delta x\to 0$时，几乎处处收敛于$f'(x)$，这时是否$\{f_{\Delta x}(x)\}$也近似一致收敛于$f'(x)$呢？下面的例子回答了这个问题。

例 3 设$f(x)$在(a,b)上连续，关于勒贝格测度几乎处处有有限导数，那么对任何$\delta>0$，必存在可测集$E_\delta\subset(a,b)$使$m((a,b)-E_\delta)<\delta$，对任何$\varepsilon>0$，存在$\eta>0$，对一切$x\in E_\delta$，$x'\in(a,b)$，当$|x'-x|<\eta$时有

$$\left|\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}-f'(x)\right|<\varepsilon。$$

证明：令$E=\{x\in(a,b):f'(x)$存在且有限$\}$，易见E是可测集，并且$m((a,b)-E)=0$。设$\{r_j\}_1^\infty$是$(-1,1)$中的全体有理数，令

$$Q_n=\{j:|r_j|<\frac{1}{n}\},$$

$$F_n^k=\bigcap_{j\in Q_n}E(|\frac{f(x+r_j)-f(x)}{r_j}-f'(x)|<\frac{1}{k})。$$

易见$\{Q_n\}_1^\infty$是递减列，因而$\{F_n^k\}_{n=1}^\infty$是递增列。因为f在E上可测，并

且 $f'(x)=\lim n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]$，所以 $f'(x)$是 E 上的可测函数，因此 F_n^k 是可测集。又因为 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n^k$，由测度的下连续性，有 n_k 使 $m((a,b)-F_{n_k}^k)<\delta/2^k$。令 $E_\delta=\bigcap_{k=1}^{\infty}F_{n_k}^k$，那么 $m(E-E_\delta)<\delta$。对 $\varepsilon>0$，有 k 使$\frac{1}{k}<\varepsilon$。令 $\eta=\frac{1}{n_k}$，因为 $E_\delta\subset E_{n_k}^k$，对 $x\in E_\delta$ 有

$$\left|\frac{f(x+r_j)-f(x)}{r_j}-f'(x)\right|<\frac{1}{k}\text{，对 } r_j\in Q_{n_k}\text{。}$$

当 $|x'-x|<\eta$ 时，有子序列 $\{r_j'\}\subset Q_{n_k}$ 使 $x+r_j'\to x'$。因为 f 在(a,b)上连续，由上面的不等式可得

$$\left|\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}-f'(x)\right|\leqslant\frac{1}{k}<\varepsilon\text{。}$$

下面我们来考察测度收敛是否蕴含几乎处处收敛。

定理 4 设$(X,\mathscr{R},\mu)$是一个测度空间，$\{f_n\}$在 E 上近似一致收敛于 f，那么$\{f_n\}$在 E 上几乎处处收敛于 f。

证明：因为 $f_n\overset{a}{\Rightarrow}f$，对 k 有可测集 $E_k\subset E$ 使 $\mu(E-E_k)<1/k$，$f_n\underset{E_k}{\Rightarrow}f$。令 $F=\bigcup_1^{\infty}E_k$，那么 $\mu(E-F)\leqslant\mu(E-E_k)<1/k\to0$。因此 $E-F$ 为零测集，在 F 上 $f_n\to f$。

定理 5(黎茨(Riesz)定理) 设$(X,\mathscr{R},\mu)$是测度空间，$E\in\mathscr{R}$，如果在 E 上可测函数列$\{f_n\}$依测度收敛于 f，那么必有子序列$\{f_{n_k}\}$在 E 上几乎处处收敛于 f。

证明：因为 $f_k\underset{\mu}{\Rightarrow}f$，对 k 有 n_k 使 $\mu(E(|f_{n_k}-f|>1/k))<\frac{1}{2^k}$。令 $F_k=E(|f_{n_k}-f|\leqslant1/k)$，则 $\mu(E-F_k)<\frac{1}{2^k}$。令 $E_j=\bigcap_{k\geqslant j}F_k$，那么$\{E_j\}$是可测集的增序列，$\mu(E-E_j)\leqslant\mu(\bigcup_j^{\infty}(E-F_k))\leqslant\frac{1}{2^{j-1}}$，在 E_j 上 $f_{n_k}\Rightarrow f$，由定理 4 可知 $f_{n_k}\underset{E}{\overset{\cdot}{\to}}f$。

最后我们再给一个表现可测函数性质的例子。

例 4 设 f 在$[a,b]$上可测，试证明存在数列$\{h_k\}$使 $h_k\to0$，$\lim f$

$(x+h_k)\dot{=}f(x)$。

分析：如果 f 在 $[a,b]$ 上连续，那么 f 在 $[a,b]$ 上一致连续，因此对任意的 $h_k\to 0$，有 $f(x+h_k)\to f(x)$ 一致成立。而对 $[a,b]$ 上的可测函数只能做到几乎处处，并且只对某个趋于零的数列 $\{h_k\}$ 才有 $f(x+h_k)\dot{\to} f(x)$。

证明：由鲁金定理，对任意的 $\gamma\in N$ 有闭集 $F_\gamma\subset[a,b]$，使 $m([a,b]-F_\gamma)<\frac{1}{2^{\gamma+1}}$，$f$ 在 F_γ 上连续，从而一致连续。因此对一切 $h_k\to 0$，只要 $x+h_k\in F_\gamma$ 就有

$$f(x+h_k)\to f(x)\qquad \forall\ x\in F_\gamma。$$

而 $x+h_k\in F_\gamma$，就是 $x\in F_\gamma-h_k=\tau_{-h_k}(F_\gamma)$。因为 $\lim\limits_{t\to 0}m(\tau_{-t}F_\gamma\cap F_\gamma)=m(F_\gamma)$，所以有 t_γ 使

$$m([a,b]-(\tau_{t_\gamma}F_\gamma\cap F_\gamma))<\frac{1}{2^\gamma},$$

$$|f(x+t_\gamma)-f(x)|<\frac{1}{\gamma},\forall\ x\in F_\gamma\cap\tau_{-t_\gamma}F_\gamma。$$

这样我们有

$$m(\{x\in[a,b]:|f(x+t_\gamma)-f(x)|\geqslant\frac{1}{\gamma}\})<\frac{1}{2^\gamma}。$$

令 $f_\gamma=f(x+t_\gamma)$，那么

$$m(\{x\in[a,b]:|f_{\gamma+1}-f|\geqslant\frac{1}{\gamma+1}\})<\frac{1}{2^{\gamma+1}},$$

因此更有

$$m(\{x\in[a,b]:|f_{\gamma+1}-f|\geqslant\frac{1}{\gamma}\})<\frac{1}{2^\gamma}。$$

这样我们就有 $f_\gamma\underset{m}{\Rightarrow}f$。由黎茨定理，有子列 $\{\gamma_k\}$ 使 $f_{\gamma_k}\dot{\to}f$。令 $h_k=t_{\gamma_k}$，那么 h_k 即为所求。

习　题

A 类

设$(X,\mathscr{R},\mu)$是测度空间，$E\in\mathscr{R}$，$\mu(E)<\infty$，$\{f_n\}$，$\{g_n\}$是E上可测函数列。

1. 设f是E上可测函数，那么$f_n\underset{\mu}{\Rightarrow}f$的充要条件是对$\{f_n\}$的任一子列$\{f_{n_k}\}$都可从中取出一个子列$\{f_{n_{k_\gamma}}\}$使$f_{n_{k_\gamma}}\dot{\to}f$。

2. 如果$f_n\underset{\mu}{\Rightarrow}f$，$g_n\underset{\mu}{\Rightarrow}g$，那么

1)f必几乎处处收敛于一个E上的可测函数，

2)如果又有$f_n\underset{\mu}{\Rightarrow}h$，那么$f\dot{=}h$，

3)如果f、g在E上可测，α、$\beta\in\boldsymbol{R}$，那么$\alpha f_n+\beta g_n\underset{\mu}{\Rightarrow}\alpha f+\beta g$，

4)如果f、g在E上可测，那么$f_ng_n\underset{\mu}{\Rightarrow}fg$，

5)如果g_n和g几乎处处不等于零，且f、g都是E上可测的，那么$f_n/g_n\underset{\mu}{\Rightarrow}f/g$。

举例说明当$\mu(E)=\infty$时4)、5)不成立。

3. 当$f_n\underset{\mu}{\Rightarrow}f$时，对任何$p>0$，有$|f_n|^p\underset{\mu}{\Rightarrow}|f|^p$，对$E$上任何可测函数$h$，$|f_n-h|^p\underset{\mu}{\Rightarrow}|f-h|^p$。

4. 设f是$E\subset\boldsymbol{R}$上($m(E)<\infty$)勒贝格可测函数，证明必存在一列阶梯函数$\{\varphi_n\}$使

$$\varphi_n\underset{m}{\Rightarrow}f,\ \varphi_n\underset{m}{\dot{\to}}f;$$

在$m(E)=\infty$时，$\varphi_n\underset{m}{\dot{\to}}f$成立，并举例说明$\varphi_n\underset{m}{\Rightarrow}$不成立。

5. 设f_n、f是E上可测函数，$\varphi:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$。

1)如果φ连续，$f_n\dot{\to}f$，那么$\varphi\circ f_n\dot{\to}\varphi\circ f$；

2)如果φ一致连续，并且$f_n\to f$一致(近似一致，依测度)成立，那么$\varphi\circ f_n\to\varphi\circ f$一致(近似一致，依测度)成立。

举例说明当 φ 不连续时 1)不成立,不一致连续时 2)不成立。

6. 设 μ 是 N 上的计数测度,那么 $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$ 当且仅当 $f_n \Rightarrow f$。

B 类

1. 定义:设 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 是测度空间,$E\subset X$,$\{f_n\}$ 是 E 上一列可测函数,如果对任何 $\varepsilon>0$

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\mu(E(|f_n-f_m|>\varepsilon))=0$$

就称 $\{f_n\}$ 是(在 E 上关于 μ)依测度基本列。设 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上依测度基本列,如果有子序列 $\{f_{n_\gamma}\}$ 依测度收敛于 E 上的可测函数 f,那么 $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$。

2. 证明 $\{f_n\}$ 是 E 上依测度基本列的充要条件是存在 E 上的某个可测函数 f,使 $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$。

3. 证明存在 $[a,b]$ 上一列连续函数 $\{f_n\}$,使得形式级数 $f_1+f_2+\cdots+f_n+\cdots$ 不打乱顺序,但可在其中插入括号分段求和,使所成的函数项级数(关于 m)几乎处处收敛于事先给定的任何勒贝格可测函数。

4. 设 $\mu(X)<\infty$,$f:X\times[0,1]\to \boldsymbol{R}$ 使对任一 $y\in[0,1]$,$f(\cdot,y)$ 是可测的,对任一 $x\in X$,$f(x,\cdot)$ 是连续的。

1)如果 $0<\varepsilon,\delta<1$,那么 $E_{\varepsilon,\delta}=\{x:|f(x,y)-f(x,0)|\geqslant\varepsilon$ 对所有 $y<\delta\}$ 是可测集,

2)对任一 $\varepsilon>0$,有 $E\subset X$ 使 $\mu(E)<\varepsilon$,并且当 $y\to 0$ 时,$f(\cdot,y)\to f(\cdot,0)$ 在 E^c 上一致成立。

5. 设 $\{f_k(x)\}$ 是 $E\subset \boldsymbol{R}$ 上依测度收敛列,且存在常数 M,使对任意的 k 有 $|f_k(x')-f_k(x)|\leqslant M|x'-x|$,$\forall\, x',x\in E$。试问 $\{f_k\}$ 在 E 上几乎处处收敛吗?

6. 设 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 是测度空间,$E\subset X$,$\{f_n\}$ 是 E 上一列可测函数,$\mu(E)<\infty$,而且 $f_n \underset{\mu}{\dot{\to}} \infty$。证明:对任一 $\delta>0$,必存在 E 的可测子集

E_δ，使 $\mu(E-E_\delta)<\delta$，并且 $\{f_n\}$ 在 E_δ 上均匀发散于 ∞（即对任何数 $M>0$，存在自然数 N，使当 $n\geqslant N$ 时，对一切 $x\in E_\delta$，$f_n(x)\geqslant M$）。

第三节 积分及其性质

我们知道闭区间 $[a,b]$ 上的非负连续函数 f 在 $[a,b]$ 上的黎曼积分是下积分和 $\Sigma_1^n m_i\Delta x_i$ 的上确界，而下积分和又是阶梯函数 $\Sigma_1^n m_i\chi_{(x_{i-1},x_i]}$ 的黎曼积分。因此

$$(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\sup\left\{\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x:\varphi(x)\leqslant f(x),\varphi(x)\text{ 是阶梯函数}\right\}。$$

另一方面，在第一节我们知道任一非负可测函数都是一个简单函数列的极限，因此我们从简单函数开始来定义抽象积分是很自然的。

定义 1 设 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 是一个测度空间，$E\in\mathscr{R}$，$\varphi=\Sigma_1^n a_i\chi_{E_i}$ 是一个简单函数，那么定义 φ 在 E 上关于 μ 的积分

$$\int_E\varphi(x)\mathrm{d}\mu=\Sigma_1^n a_i\mu(E_i\cap E)。\tag{1}$$

如果 f 是 E 上的非负可测函数，那么定义 f 在 E 上关于 μ 的积分

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu$$
$$=\sup\left\{\int_E\varphi(x)\mathrm{d}\mu:0\leqslant\varphi\leqslant f,\varphi\text{ 是简单函数}\right\}。$$

如果 f 是 E 上任意的可测函数，并且 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}\mu$，$\int_E f_-\mathrm{d}\mu$ 中至少有一个是有限的，那么定义

$$\int_E f(x)\mathrm{d}\mu=\int_E f^+(x)\mathrm{d}\mu-\int_E f^-(x)\mathrm{d}\mu。$$

如果 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}\mu$，$\int_E f^-(x)\mathrm{d}\mu$ 都是有限的，那么称 f 在 E 上可积。在 E 上关于勒贝格测度可积的函数全体记为 $L(E)$。

为简单起见，可把 $\int_E f(x)\mathrm{d}\mu$ 记为 $\int_E f\mathrm{d}\mu$、$\int f\mathrm{d}\mu$，甚至 $\int f$。

注1 1)简单函数的积分具有可加性。设 $\varphi_1(x)=\Sigma_{i=1}^{m}\alpha_i\chi_{E_i}(x)$，$\varphi_2(x)=\Sigma_{j=1}^{n}\beta_j\chi_{F_j}(x)$，令 $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$，那么

$$\int\varphi\mathrm{d}\mu=\int\varphi_1\mathrm{d}\mu+\int\varphi_2\mathrm{d}\mu。$$

事实上，令 $G_{ij}=E_i\cap F_j,\forall\ 1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n,G_{in+1}=E_i-\bigcup_1^nF_j$，$G_{m+1j}=F_j-\bigcup_1^mE_i,r_{ij}=d_i+\beta_j\quad\forall\ 1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n,r_{in+1}=d_i,r_{m+1\,j}=\beta_j$，那么 $\varphi(x)=\Sigma_{i=1}^{m+1}\Sigma_{j=1}^{n+1}r_{ij}\chi_{G_{ij}}(x)$，从而

$$\begin{aligned}\int\varphi\mathrm{d}\mu&=\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{n+1}r_{ij}\mu(G_{ij})\\&=\Sigma_{i=1}^{m}\alpha_i\mu(E_i)+\Sigma_{j=1}^{n}\beta_j\mu(F_j)\\&=\int\varphi_1\mathrm{d}\mu+\int\varphi_2\mathrm{d}\mu。\end{aligned}$$

2)E 上的有界可测函数在 E 上是可积的。

3)f 在 E 上可积当且仅当 $|f|$ 在 E 上可积，并且

$$\left|\int f\mathrm{d}\mu\right|\leqslant\int|f|\mathrm{d}\mu。$$

这是因为 $|f|=f^++f^-$，因此

$$\left|\int f\mathrm{d}\mu\right|=\left|\int f^+-\int f^-\right|\leqslant\int f^++\int f^-=\int|f|\mathrm{d}\mu。$$

性质3)是黎曼积分与关于抽象测度 μ 的积分的本质区别之一。例如函数 $f(x)=\Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)\chi_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]}$ 在 $[0,1]$ 上黎曼可积，而关于勒贝格测度不可积。

性质1(积分的单调性) 设 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 是一个测度空间，$E\in\mathscr{R}$，f、g 是 E 上的非负可测函数，或者都是可积函数，并且 $f\leqslant g$，那么

$$\int_Ef\mathrm{d}\mu\leqslant\int_Eg\mathrm{d}\mu。$$

证明：先设 f、g 非负。易见有集合的包含关系

$\{\varphi:\varphi$ 是简单函数，$0\leqslant\varphi\leqslant f\}$

$\subset\{\varphi:\varphi$ 是简单函数，$0\leqslant\varphi\leqslant g\}$。

因此由积分的定义有

$$\int_Ef\mathrm{d}\mu=\sup\{\int_E\varphi\,\mathrm{d}\mu:0\leqslant\varphi\leqslant f,\varphi\text{为简单函数}\}$$

$$\leqslant \sup\{\int_E \varphi \, d\mu : 0 \leqslant \varphi \leqslant g, \varphi \text{为简单函数}\}$$

$$= \int_E g d\mu。$$

如果 f 是任意可积函数，并且 $f \leqslant g$，那么 $f^+ \leqslant g^+, f^- \geqslant g^-$。由上面的证明有 $\int_E f^+ \leqslant \int_E g^+, \int_E f^- \geqslant \int_E g^-$。由于 $\int_E f^-$、$\int_E g^-$ 都是有限的，所以

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- \leqslant \int_E g^+ - \int_E g^- = \int_E g。$$

性质 2 设 $(X, \mathscr{R}, \mu)$ 是测度空间，A、$E \in \mathscr{R}$，$A \subset E$，f 在 A 上非负可测或可积，那么

$$\int_A f d\mu = \int_E \chi_A f d\mu。$$

证明：先设 f 是非负可测函数，φ 是不大于 f 的非负简单函数，那么

$$\int_A f = \sup_{\varphi} \int_A \varphi = \sup_{0 \leqslant \psi \leqslant \chi_A f} \int_E \psi = \int_E \chi_A f,$$

其中 ψ 也是简单函数。如果 f 是一般可积函数，那么

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^- = \int_E \chi_A f^+ - \int_E \chi_A f^-$$

$$= \int_E (\chi_A f)^+ - \int_E (\chi_A f)^- = \int_E \chi_A f$$

（只用到一般可积函数积分的定义）。

性质 3 设 $(X, \mathscr{R}, \mu)$ 是一个测度空间，f 是 E 上的非负可测函数或可积函数，c 为常数，那么

$$\int_E cf = c\int_E f。 \tag{2}$$

证明：显然(2)式对 $c=0$ 成立，因此下面设，$c \neq 0$。先设 f 是简单函数，记 $f(x) = \Sigma_1^n a_i \chi_{E_i}(x)$，那么 $cf = \Sigma_1^n c a_i \chi_{E_i}$，根据积分的定义可知(2)式成立。当 f 为非负可测函数时有

$$\int_E cf = \sup\left\{\int_E \varphi : 0 \leqslant \varphi \leqslant cf, \varphi \text{是简单函数}\right\}$$

$$= \sup\left\{c\int_E \frac{\varphi}{c}: 0 \leqslant \frac{\varphi}{c} \leqslant f, \varphi\text{是简单函数}\right\}$$

$$= \sup\left\{c\int_E \varphi: 0 \leqslant \varphi \leqslant f, \varphi\text{是简单函数}\right\}$$

$$= c\int_E f。$$

如果 f 是一般可积函数，那么对 $c > 0$ 有 $(cf)^{\pm} = cf^{\pm}$，并且 $c\int f^{\pm}$ 有限当且仅当 $\int (cf)^{\pm}$ 有限，因此(2) 成立。对 $c < 0$ 有 $(cf)^{\pm} = -cf^{\mp}$，并且 $\int (cf)^{\pm}$ 有限当且仅当 $\int -cf^{\mp}$ 有限，因此

$$\int_E cf = \int_E (cf)^+ - \int_E (cf)^-$$

$$= \int_E (-c)f^- - \int_E (-c)f^+$$

$$= c(\int f^+ - \int f^-) = c\int f。$$

性质 4　设 $(X, \mathscr{R}, \mu)$ 是一个测度空间，f 是 E 上非负可积函数，那么

1) $\mu(E(f=\infty))=0$，并且 $E(f>0)$ 是 σ-有限集，

2) $\int_E f\mathrm{d}\mu = 0$，当且仅当 $f \overset{\cdot}{\underset{E}{=}} 0$。

证明：对 $a \in (0, \infty)$，令 $E_a = E(f \geqslant a)$，记 $I = \int_E f$，那么

$$I \geqslant \int_E f\chi_{E_a} \geqslant \int_E a\chi_{E_a} = a\mu(E_a)。$$

因此 $\mu(E_a) \leqslant a^{-1}I$。

1) 因为 $E(f=+\infty) = \bigcap_1^\infty E_n$，所以 $\mu(E(f=+\infty)) \leqslant \mu(E_n) \leqslant n^{-1}I \to 0$。同理可证 $\mu(E(f=-\infty))=0$。而 $E(f>0) = \bigcup_1^\infty E_{\frac{1}{n}}$，$\mu(E_{\frac{1}{n}}) < nI$，所以 $E(f>0)$ 是 σ-有限的。

2) 如果 $I = \int_E f = 0$，那么对任一 n，$\mu(E_{\frac{1}{n}})=0$。而 $E(f>0) = \bigcup_1^\infty E_{\frac{1}{n}}$，因此 $\mu(E(f>0))=0$，也即 $f \overset{\cdot}{\underset{E}{=}} 0$。

下面一个结论揭示了积分和测度的关系，藉此可以把测度的许多性质转移到积分上去。

性质 5 设$(X,\mathscr{R},\mu)$是一个测度空间，φ是 X 上的一个非负简单函数，那么

$$\gamma(E)=\int_E\varphi\,\mathrm{d}\mu$$

是 $\mathscr{R}$ 上的测度。

证明：设 $\varphi=\Sigma_1^n a_i\chi_{E_i},a_i>0$。由定义可知 $\gamma(\varnothing)=0,\gamma(E)\geqslant0$。下面证明 γ 具有可列可加性。设$\{A_j\}$是互不相交的可测集列，$A=\bigcup A_j$，那么对 E_i 有 $\mu(E_i\cap A)=\Sigma_{j=1}^\infty\mu(E_i\cap A_j)$，因此

$$\begin{aligned}\gamma(A)&=\int_A\varphi\,\mathrm{d}\mu=\Sigma_1^n a_i\mu(E_i\cap A)\\&=\Sigma_{i=1}^n a_i\Sigma_{j=1}^\infty\mu(E_i\cap A_j)\\&=\Sigma_{j=1}^\infty\Sigma_{i=1}^n a_i\mu(E_i\cap A_j)\\&=\Sigma_{j=1}^\infty\int_{A_j}\varphi\,\mathrm{d}\mu=\Sigma\gamma(A_j)。\end{aligned}$$

推论 1 设$(X,\mathscr{R},\mu)$是一个测度空间，$\{E_n\}\subset\mathscr{R}$ 是一个扩张列，$E=\bigcup E_n$，φ是 E 上非负简单函数，那么

$$\lim\int_{E_n}\varphi\,\mathrm{d}\mu=\int_E\varphi\,\mathrm{d}\mu。$$

证明：令 $\gamma(E)=\int_E\varphi\,\mathrm{d}\mu$，由性质 5 可知 γ 是一个测度，从而具有下连续性，因此

$$\lim\int_{E_n}\varphi\,\mathrm{d}\mu=\lim\gamma(E_n)=\gamma(E)=\int_E\varphi\,\mathrm{d}\mu。$$

为了进一步讨论积分的性质，我们需要下面的引理。

引理 1(勒维(Levi)引理) 设$(X,\mathscr{R},\mu)$是一个测度空间，$\{f_n\}$是 E 上非负可测函数列，$\{f_n\}$单调增收敛于 f，那么

$$\lim\int_E f_n\mathrm{d}\mu=\int_E f\mathrm{d}\mu。\tag{3}$$

证明：易见$\{\int_E f_n\mathrm{d}\mu\}$是单调增数列，因此 $\lim\int f_n$ 存在(可能是 $+$

∞)。因为$\int f_n \leqslant \int f$，所以 $\lim\int f_n \leqslant \int f$。为证反方向的不等式，固定 $\alpha \in [0,1)$，设φ为简单函数，$0\leqslant\varphi\leqslant f$。令$E_n = E(f_n \geqslant \alpha\varphi)$，那么$\{E_n\}$是可测集的递增列，并且$\bigcup E_n = E$。易见

$$\alpha\int_{E_n}\varphi\leqslant\int_{E_n}f_n\leqslant\int_E f_n。$$

由推论 1 有 $\alpha\int_E\varphi\leqslant\lim\int_E f_n$。令 $\alpha\to 1$ 得$\int_E\varphi\leqslant\lim\int_E f_n$。对 $0\leqslant\varphi\leqslant f$ 取上确界，得$\int f\leqslant\lim\int f_n$。

注 2　1)$\{f_n\}$ 的单调性不可少。例如取 μ 为勒贝格测度，$f_n = \chi_{(n,n+1)}$。易见 $f_n\to 0$，因此(3) 式右边为零，而左边为 1。

2) 如果$\{f_n\}$ 单调下降，那么(3) 可能不成立。例如令 $f_n = \chi_{(n,\infty)}$，μ 为勒贝格测度，那么(3) 式右边是零，而左边为 $+\infty$。

推论 2　设$\{E_n\}$ 是可测集的增序列，$E=\bigcup E_n$，f 是 E 上非负可测函数，那么

$$\lim\int_{E_n}f\mathrm{d}\mu = \int_E f\mathrm{d}\mu。$$

证明：令 $f_n = f\chi_{E_n}$，则$\{f_n\}$ 是 E 上可测函数的增序列，$f(x) = \lim f_n(x)$，由勒维引理有

$$\lim\int_{E_n}f\mathrm{d}\mu = \lim\int_E f_n\mathrm{d}\mu = \int_E f\mathrm{d}\mu。$$

定理 1　设$(X,\mathscr{R},\mu)$ 是一个测度空间，$\{f_n\}_1^m(m\leqslant\infty)$ 是 $E\subset X$ 上非负可测函数列，$f = \Sigma_{n=1}^m f_n$，那么

$$\int_E f\mathrm{d}\mu = \Sigma_1^m\int f_n\mathrm{d}\mu。\qquad (4)$$

证明：先证明(4) 对 $m = 2$ 成立。设 f_1、f_2 是两个非负可测函数，$\{\varphi_j\}$、$\{\psi_j\}$ 是趋于 f_1、f_2 的简单函数增序列，于是$\{\varphi_j+\psi_j\}$ 是趋于 f_1+f_2 的简单函数增序列。由勒维引理有

$$\int_E(f_1+f_2)\mathrm{d}\mu = \lim\int_E(\varphi_j+\psi_j)\mathrm{d}\mu$$

$$= \lim\int_E \varphi_j \mathrm{d}\mu + \lim\int_E \psi_j \mathrm{d}\mu$$
$$= f_1 + f_2。$$

由归纳法有$\int_E \Sigma_1^N f_n \mathrm{d}\mu = \Sigma_1^N \int_E f_n \mathrm{d}\mu$。令 $F_N = \Sigma_1^N f_n$，对$\{F_N\}$用勒维引理得(4)。

性质 6(积分的线性性)　设$(X,\mathscr{R},\mu)$是一个测度空间，$E \in \mathscr{R}$，f、g 在 E 上可积，那么对任何 α、$\beta \in \boldsymbol{R}$，有

$$\int_E (\alpha f + \beta g)\mathrm{d}\mu = \alpha\int_E f\mathrm{d}\mu + \beta\int_E g\mathrm{d}\mu。$$

证明：由性质 3 只要证明 $\alpha = \beta + 1$ 的情形。记 $h = f + g$，易见 $|h| \leqslant |f| + |g|$。因为 $|f|$、$|g|$ 可积，由定理 1，$|f| + |g|$ 可积，从而 $|h|$ 可积，因此 h^+，h^- 可积。因为 $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$，所以 $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$。再由定理 1，有

$$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int h^- + \int f^+ + \int g^+,$$

从而

$$\int h = \int h^+ - \int h^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- = \int f + \int g。$$

定理 2(积分的可列可加性)　设$(X,\mathscr{R},\mu)$是测度空间，E、E_i 是可测集，$E = \bigcup_1^\infty E_i$，E_i 两两不相交。设 f 在 E 上可积，那么 f 在 E 上可积的充要条件是

1)f 在 E_i 上可积，

2)$\Sigma\int_{E_i} |f|\mathrm{d}\mu < \infty$。

当 f 可积时，$\int_E f = \Sigma\int_{E_i} f$。

证明：令 $f_i = |f|\chi_{E_i}$，则 $|f| = \Sigma f_n$。由定理 12 有

$$\int_E |f| = \Sigma\int_E f_n = \Sigma\int_{E_n} |f|。$$

因此 f 在 E 上可积当且仅当 $|f|$ 在 E 上可积当且仅当 $|f|$ 在 E_i 上

可积，并且 $\Sigma\int_{E_i}|f|<\infty$。

当 f 可积时，f^+、f^- 也可积。令 $g_n=f^+\chi_{E_n}, h_n=f^-\chi_{E_n}$。由上面的证明有

$$\int_E f^+=\Sigma\int_E g_n=\Sigma\int_{E_n}f^+, \int_E f^-=\Sigma\int_E h_n=\Sigma\int_{E_n}f^-。$$

因此

$$\int f=\int f^+-\int f^+=\Sigma\int_{E_n}f^+-\Sigma\int_{E_n}f^-$$
$$=\Sigma\int_{E_n}(f^+-f^-)=\Sigma\int_{E_n}f。$$

定理 3(**积分的绝对连续性**)　设 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 是一个测度空间，$E\in\mathscr{R}$，f 是 E 上可积函数，那么对任何 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta>0$，当 e 是 E 的可测子集，$\mu(e)<\delta$ 时，有

$$\int_e|f|\mathrm{d}\mu<\varepsilon。$$

证明：根据定义 1 存在简单函数 φ 使 $0\leqslant\varphi\leqslant f$，

$$\int_E(|f|-\varphi)\mathrm{d}\mu<\varepsilon/2。$$

设 $\varphi=\Sigma_1^n a_i\chi_{E_i}$，令 $M=\max\{a_i\}_1^n, \delta=\dfrac{\varepsilon}{2M+1}$，那么当 $\mu(e)<\delta$ 时，有

$$\int_e|f|\mathrm{d}\mu=\int_e(|f|-\varphi)\mathrm{d}\mu+\int_e\varphi\mathrm{d}\mu$$
$$\leqslant\int_E(|f|-\varphi)\mathrm{d}\mu+\int_e\varphi\mathrm{d}\mu$$
$$\leqslant\varepsilon/2+M\mu(e)<\varepsilon。$$

作为本节的结束我们来考察积分的变量代换。为此我们先回忆数学分析中积分的变量代换定理。

设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，$x=\varphi(t)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的连续可微函数，$\varphi([\alpha,\beta])\subset[a,b]$，$\varphi(d)=a$，$\varphi(\beta)=b$，那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi(t)。 \quad (5)$$

现在我们把上式改写成关于测度的积分的形式。令 $F = [a,b]$，$\mu_2 = \mathrm{d}x$，那么(5) 式左边为

$$\int_F f(x)\mathrm{d}\mu_2(x)。$$

显然$[\alpha,\beta] = \varphi^{-1}(F)$，而我们又希望(5) 式右边可以写成

$$\int_{\varphi^{-1}(F)} f(\varphi(t))\mathrm{d}\mu_1(t),$$

因此对 $E \subset [\alpha,\beta]$，要求 $\mu_1(E) = \mu_2(\varphi(E))$。

这样，我们对关于测度的积分的变量代换公式已有了一个粗略的认识，下面我们来建立有关的理论。

定义 2 设$(X_i,\mathscr{R}_i,\mu_i)(i = 1,2)$ 是测度空间，$\varphi: X_1 \to X_2$ 是$(\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2)$ 可测映射。称 φ 是保测映射，如果对 $E_i \in \mathscr{R}_i$，$\varphi(E_1) \in \mathscr{R}_2$，$\varphi^{-1}(E_2) \in \mathscr{R}_1$，并且 $\mu_2(E_2) = \mu_1(\varphi^{-1}(E_2))$，$\mu_1(E_1) = \mu_2(\varphi(E_1))$。

引理 2 设 $\varphi: (X_1,\mathscr{R}_1,\mu_1) \to (X_2,\mathscr{R}_2,\mu_2)$ 是一个保测映射，如 $E,F \in \mathscr{R}_1$，$\mu_1(E \cap F) = 0$，那么 $\mu_2(\varphi(E) \cap \varphi(F)) = 0$；如果 $E,F \in \mathscr{R}_2$，$\mu_2(E \cap F) = 0$，那么 $\mu_1(\varphi^{-1}(E) \cap \varphi^{-1}(F)) = 0$。

证明：设 $E,F \in \mathscr{R}_1$，$\mu_1(E \cap F) = 0$。因为 $E \cup F = (E - (E \cap F)) \cup (F - (E \cap F)) \cup (E \cap F)$，右边为两两不交的可测集的并，所以

$$\begin{aligned}\mu_1(E) + \mu_1(F) &= \mu_1(E - E \cap F)) + \mu_1(F - (E \cap F)) \\ &\quad + \mu_1(E \cap F) \\ &= \mu_1(E \cup F) \\ &= \mu_2(\varphi(E \cup F)) \\ &= \mu_2(\varphi(E) \cup \varphi(F)) \\ &= \mu_2(\varphi(E)) + \mu_2(\varphi(F)) - \mu_2(\varphi(E) \cap \\ &\quad \varphi(F))\end{aligned}$$

$$= \mu_1(E) + \mu_1(F) - \mu_2(\varphi(E) \cap \varphi(F))。$$

由此推出 $\mu_2(\varphi(E) \cap \varphi(F)) = 0$。

设 $E, F \in \mathscr{R}_2$，$\mu_2(E \cap F) = 0$。因为 $\varphi^{-1}(E) \cap \varphi^{-1}(F) = \varphi^{-1}(E \cap F)$，所以

$$\mu_1(\varphi^{-1}(E) \cap \varphi^{-1}(F)) = \mu_1(\varphi^{-1}(E \cap F))$$
$$= \mu_2(E \cap F) = 0。$$

定理4 设 $(X_i, \mathscr{R}_i, \mu_i)(i = 1, 2)$ 是测度空间，$\varphi: (X_1, \mathscr{R}_1, \mu_1) \to (X_2, \mathscr{R}_2, \mu_2)$ 是保测单射，$F \subset X_2$，那么 F 上的函数 f 关于 μ_2 可积当且仅当 $f \circ \varphi$ 在 $\varphi^{-1}(F)$ 上关于 μ_1 可积。当 f 可积时，有

$$\int_F f(x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2) = \int_{\varphi^{-1}(F)} f(\varphi(x_1))\mathrm{d}\mu_1(x_1)。$$

证明：如果 $g = \Sigma_1^n \beta_i \chi_{F_i}$ 是 $(X_2, \mathscr{R}_2)$ 上的简单函数，那么 $g \circ \varphi = \Sigma_1^n \beta_i \chi_{\varphi^{-1}(F_i)}$ 是 $(X_1, \mathscr{R}_1)$ 上的简单函数。反之，如果 $h = \Sigma_1^n \alpha_i \chi_{E_i}$ 是 (X_1, R_1) 上的简单函数，令 $F_i = \varphi(E_i)$，因为 φ 是单射，F_i 也两两不交，所以 $g = \Sigma_1^n \alpha_i \chi_{F_i}$ 是 $(X_2, \mathscr{R}_2)$ 上的简单函数，并且 $h = g \circ \varphi$。对 g 我们有

$$\int_F g(x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2) = \Sigma_1^n \beta_i \mu_2(F_i \cap F)$$
$$= \Sigma_1^n \beta_i \mu_1(\varphi^{-1}(F_i \cap F))$$
$$= \Sigma_1^n \beta_i \mu_1(\varphi^{-1}(F_i) \cap \varphi^{-1}(F))$$
$$= \int_{\varphi^{-1}(F)} (\Sigma_1^n \beta_i \chi_{\varphi^{-1}(F_i)})\mathrm{d}\mu_1(x_1)$$
$$= \int_{\varphi^{-1}(F)} g \circ \varphi(x_1)\mathrm{d}\mu_1(x_1)。$$

设 f 是 $(\mathscr{R}_2, \mathscr{B})$ 可测，那么 $f \circ \varphi$ 是 $(\mathscr{R}, \mathscr{B})$ 可测，所以对 $f \geqslant 0$ 有

$$\int_F f(x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2)$$
$$= \sup\left\{\int_F g(x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2): 0 \leqslant g \leqslant f, g \text{ 是简单函数}\right\}$$
$$= \sup\left\{\int_{\varphi^{-1}(F)} g \circ \varphi(x_1)\mathrm{d}\mu_1(x_1): 0 \leqslant g(\varphi) \leqslant f(\varphi),\right.$$

g 是简单函数}

$$= \sup\left\{\int_{\varphi^{-1}(F)} h(x_1)\mathrm{d}\mu_1(x_1): 0 \leqslant h \leqslant f(\varphi),\right.$$

h 是简单函数}

$$= \int_{\varphi^{-1}(F)} f(\varphi(x_1))\mathrm{d}\mu_1(x_1)。$$

因此 f 关于 μ_2 可积当且仅当 $f\circ\varphi$ 关于 μ_1 可积。

对一般函数 f 分别考虑 f^+、f^-，得到

$$\int_F f(x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2)$$

$$= \int_F f^+(x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2) - \int_F f^-(x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2)$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(F)} f^+(\varphi(x_1))\mathrm{d}\mu_1(x_1) - \int_{\varphi^{-1}(F)} f^-(\varphi(x_1))\mathrm{d}\mu_1(x_1)$$

$$= \int_{\varphi^{-1}(F)} f(\varphi(x_1))\mathrm{d}\mu_1(x_1)。$$

定义 3 设 $(X_i,\mathscr{R}_i)(i=1,2)$ 是可测空间，$\varphi: X_1 \to X_2$ 是 $(\mathscr{R}_1,\mathscr{R}_2)$ 可测双射，并且 $\mathscr{R}_1 = \varphi^{-1}(\mathscr{R}_2)$，那么称 φ 是 $(X_1,\mathscr{R}_1)$ 到 $(X_2,\mathscr{R}_2)$ 的可测同构映射。

易见如果 φ 是可测同构映射，那么 φ^{-1} 也是可测同构映射。

推论 3 设 $(X_i,\mathscr{R}_i)(i=1,2)$ 是可测空间，$\varphi:(X_1,\mathscr{R}_1)\to(X_2,\mathscr{R}_2)$ 是可测同构映射，μ 是 $(X_2,\mathscr{R}_2)$ 上的测度，$F\in\mathscr{R}_2$。那么 F 上的函数 f 关于 μ 可积当且仅当 $\varphi^{-1}(F)$ 上的函数 $f\circ\varphi$ 关于测度 $\gamma(\cdot) = \mu(\varphi(\cdot))$ 可积。当 f 可积时，有

$$\int_F f(x_2)\mathrm{d}\mu(x_2) = \int_{\varphi^{-1}(F)} f(\varphi(x_1))\mathrm{d}\gamma(x_1)。$$

证明：令 $\mu_1 = \gamma, \mu_2 = \mu$。为用定理 4 只要证明 φ 是一个 $(X_1,\mathscr{R}_1,\mu_1)\to(X_2,\mathscr{R}_2,\mu_2)$ 保测映射。设 $F\in R_2$，那么 $\varphi^{-1}(F)\in\mathscr{R}_1$。对 $E\in\mathscr{R}_1$，有 $F\in\mathscr{R}_2$ 使 $E=\varphi^{-1}(F)$，并且 $\varphi(E)=F$。因此 $\mu_2(F) = \mu(\varphi(\varphi^{-1}(F))) = \gamma(\varphi^{-1}(F)) = \mu_1(\varphi^{-1}(F))$，所以 φ 是一个保测映射。

推论 4 设 $(R,\mathscr{L}^g,\mu_g)$ 是直线上的勒贝格 — 斯蒂阶测度空间，

$\varphi: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 是严格单调增加连续函数，f 是波雷耳可测函数，那么 f 在波雷耳集 F 上 μ_g 可积当且仅当 $f\circ\varphi$ 在集 $\varphi^{-1}(F)$ 上关于 $\mu_{g\cdot\varphi}$ 可积。当 f 可积时，有

$$\int_F f(x)\mathrm{d}g(x) = \int_{\varphi^{-1}(F)} f(\varphi(x))\mathrm{d}g(\varphi(x))。$$

证明：f 波雷耳可测，因此勒贝格—斯蒂阶可测。又因为 φ 是严格单调增连续函数，$f\circ\varphi$ 也是波雷耳可测，从而属于 $\mathscr{L}^{g\cdot\varphi}$。为了应用推论 3，我们只要证明 φ 是一个 $(\boldsymbol{R},\mathscr{B},\mu_g)\to(\boldsymbol{R},\mathscr{B},\mu_{g\cdot\varphi})$ 可测同构映射。显然 φ 是一个双射。因为 $\varphi^{-1}((a,b]) = (\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b)]$，所以 $\varphi^{-1}(\mathscr{R}_0) = \mathscr{R}_0$。这里 $\mathscr{R}_0$ 是例 Ⅱ.1.2 所定义的环。令 $\mathscr{M} = \{E\subset \boldsymbol{R}, \varphi^{-1}(E)\in\mathscr{B}\}$。易证 $\mathscr{M}$ 是一个 σ-环，并且 $\mathscr{M}\supset\mathscr{R}_0$，从而 $\mathscr{M}\supset\mathscr{B}$，也即 $\varphi^{-1}(\mathscr{B})\subset\mathscr{B}$。考虑映射 φ^{-1}，可得 $\varphi(\mathscr{B})\subset\mathscr{B}$，从而 $\mathscr{B}\subset\varphi^{-1}(\mathscr{B})$，因此 $\mathscr{B} = \varphi^{-1}(\mathscr{B})$。

习　题

A　类

1. 证明：对 $[a,b]$ 上非负连续函数 f，如果 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$，那么 $f(x) = 0$。如果勒贝格积分换成勒贝格—斯蒂阶积分，结果如何？

2. 设 f、g 是 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 上可积函数，那么 $(f^2+g^2)^{1/2}$ 也是 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 上可积函数。

3. 当 $f(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上勒贝格可积函数时，证明对任何 t，$f(x+t)$ 也是勒贝格可积的。如果 f 是 $(\boldsymbol{R},\mathscr{L}^g,\mu_g)$ 上可积函数，问 $f(x+t)$ 是否在 $(\boldsymbol{R},\mathscr{L}^g,\mu_g)$ 上可积，为什么？

4. 设 E 是测度空间 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 上测度有限的集，证明 f 在 E 上可积的充要条件是 $\sum_1^\infty n\mu(E_n) < \infty$，其中 $E_n = E(n\leqslant |f| < n+1)$。

5. 设 μ_1、μ_2 是可测空间 $(X,\mathscr{R})$ 上的两个测度，并且对一切 $E\in\mathscr{R}$，$\mu_1(E)\leqslant\mu_2(E)$。证明：如果 f 在 E 上关于 μ_2 可积，那么 f 在 E 上

关于 μ_1、$\mu_1+\mu_2$ 也可积，并且

$$\int_E f\mathrm{d}(\mu_1+\mu_2)=\int_E f\mathrm{d}\mu_1+\int_E f\mathrm{d}\mu_2。$$

6. 设 $f(x)$ 在 E 上勒贝格可积，$E_n=E(|f|>n)$，试证：$\lim n\, mE_n=0$。

7. 设 $f\geqslant 0$，在 E 上可测，令

$$[f(x)]_p=\begin{cases}f(x) & \text{当 } f(x)\leqslant p \text{ 时},\\ p & f(x)>p \text{ 时},\end{cases}$$

试证：$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{p\to\infty}\int_E[f(x)]_p\mathrm{d}x$。

B 类

1. 如果 $f(x)=\begin{cases}x^{-a}\sin\dfrac{1}{x} & 0<x\leqslant 1,\\ 0 & x=0,\end{cases}\quad (a>0)$，

讨论 a 为何值时，f 是 $[0,1]$ 上勒贝格可积函数或不可积函数。

如果 $f(x)=\begin{cases}|x|^{-a}\sin\dfrac{1}{x} & |x|>0,\\ 0 & x=0,\end{cases}\quad (a>0)$，

讨论 a 为何值时，f 是 $\boldsymbol{R}$ 上勒贝格可积或不可积函数。

2. 设 $(X_i,\mathscr{R}_i)(i=1,2)$ 是可测空间，φ 是 $X_1\to X_2$ 的可测映射，记 $\tilde{\mathscr{R}}=\varphi^{-1}(\mathscr{R}_2)$。

1) 证明 $\tilde{R}$ 也是 $\mathscr{R}_1$ 的一个 σ- 子环；

2) 如果 f 是 E 上关于 $(X_1,\mathscr{R}_2,\mu)$ 可积函数，那么 $f(\varphi(\cdot))$ 是 $\varphi^{-1}(E)$ 上 $(X_1,\tilde{\mathscr{R}},\gamma(\cdot))$ 的可积函数，其中 $\gamma(\cdot)=\mu(\varphi(\cdot))$，并且

$$\int_E f(x_2)\mathrm{d}\mu(x_2)=\int_{\varphi^{-1}(E)}f(\varphi(x_1)\mathrm{d}\mu(\varphi(x_1))。$$

3. 设 $\{f_n\}$ 是 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 上的非负可测函数列，$f_n\to f$ 并且 $\int f=\lim\int f_n<\infty$，那么对任一 $E\in\mathscr{R}$，$\int_E f=\lim\int_E f_n$。但是当 $\int f=\lim\int f_n$

$=\infty$ 时上述结论未必成立。

4. 设 f 是 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 上的非负可测函数，对 $E\in\mathscr{R}$，令 $\lambda(E)=\int_E f\mathrm{d}\mu$，证明：对任一非负可测函数 g，有 $\int g\mathrm{d}\lambda=\int fg\mathrm{d}\mu$。

5. 设 $\{f_n\}$ 是 E 上非负可测函数列，$\{f_n\}\downarrow f$，并且对某个 k，$\int f_k<\infty$，那么 $\int f=\lim\int f_n$。

6. 如果 f 是 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 上的可测函数，$f\geqslant 0$，$\int_X f<\infty$，那么对任一 $\varepsilon>0$，有 $E\in\mathscr{R}$ 使 $\mu(E)<\infty$，$\int_E f>\int f-\varepsilon$。

第四节　积分的极限定理

在上一节我们已经涉及对函数的单调列的积分取极限的问题，本节我们将在更一般的条件下讨论积分号下取极限的问题。

定理 1　**(法都(Fatou)定理)**　设 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 是一个测度空间，$E\in\mathscr{R}$，$\{f_n\}$ 是 E 上非负可测函数，那么

$$\int_E \underline{\lim} f_n\mathrm{d}\mu\leqslant\underline{\lim}\int_E f_n\mathrm{d}\mu。\tag{1}$$

证明：对任一 k，定义 $g_k(x)=\inf_{n\geqslant k}f_n(x)$。易见 $\{g_n\}$ 是非负可测函数的单调增序列，并且对 $n\geqslant k$ 有 $g_k\leqslant f_n$，从而 $\int g_k\mathrm{d}\mu\leqslant\int f_n\mathrm{d}\mu$。取下确界，有 $\int g_k\mathrm{d}\mu\leqslant\inf_{n\geqslant k}\int f_n\mathrm{d}\mu$。令 $k\to\infty$ 由列维定理有

$$\int\underline{\lim} f_n=\int\lim g_k=\lim\int g_k\leqslant\underline{\lim}\int f_n。$$

注 1　(1) 中的严格不等号也可能成立。例如令 $E=(0,1)$，$f_n(x)=nx^{n-1}(n=1,2,\cdots)$，那么

$$\int_E\lim(nx^{n-1})\mathrm{d}m=0<1=\lim\int_E nx^{n-1}\mathrm{d}m。$$

推论 1　设 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 是一个测度空间，$E\in\mathscr{R}$，$\{f_n\}$ 是 E 上非

负可测函数列，f 可测，f_n 几乎处处收敛于 f，那么

$$\int_E f\mathrm{d}\mu \leqslant \lim\int_E f_n\mathrm{d}\mu。$$

定理 2（勒贝格控制收敛定理） 设 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 是一个测度空间，$E\in\mathscr{R}$，$\{f_n\}$ 是 E 上可测函数列，g 是 E 上非负可积函数，使 $|f_n(x)|\leqslant g(x)$。如果 f 可测，f_n 几乎处处收敛于 f，那么 f 可积，并且

$$\int_E f\mathrm{d}\mu = \lim\int_E f_n\mathrm{d}\mu。$$

证明：易见 $|f|\leqslant g$，从而 f 在 E 上可积。因为 $g+f_n\geqslant 0$，$g-f_n\geqslant 0$，应用法都定理有

$$\int g\mathrm{d}\mu + \int f\mathrm{d}\mu \leqslant \underline{\lim}\int(g+f_n)\mathrm{d}\mu = \int g\mathrm{d}\mu + \underline{\lim}\int f_n\mathrm{d}\mu,$$

$$\int g\mathrm{d}\mu - \int f\mathrm{d}\mu \leqslant \underline{\lim}\int(g-f_n)\mathrm{d}\mu = \int g\mathrm{d}\mu - \overline{\lim}\int f_n\mathrm{d}\mu。$$

因此 $\overline{\lim}\int f_n\mathrm{d}\mu \leqslant \int f\mathrm{d}\mu \leqslant \underline{\lim}\int f_n\mathrm{d}\mu$，从而 $\int f\mathrm{d}\mu = \lim\int f_n\mathrm{d}\mu$。

定理 3（有界收敛定理） 设 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 是一个测度空间，$E\in\mathscr{R}$，$\mu(E)<\infty$，$\{f_n\}$ 是 E 上可测函数，$|f_n|\leqslant M$。如果 f_n 几乎处处收敛于 f，f 在 E 上可测，那么

$$\int_E f\mathrm{d}\mu = \lim_n\int_E f_n\mathrm{d}\mu。$$

证明：令 $g(x)=M\chi_E(x)$。因为 $\mu(E)<\infty$，所以 g 可积。应用定理 2 即得。

注 2 上面我们按照勒维引理 ⇒ 法都定理 ⇒ 勒贝格控制收敛定理的路线论证。事实上，这三个定理是等价的，读者可以从任一定理出发推出其他两个定理。

下面我们来加强定理 2，为此需要引入一些新的概念和结论。

设 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 是一个测度空间。称 $\{E_n\}$ 是 E 的一列测度有限单调覆盖，如果 $\{E_n\}$ 是可测集的单调增序列，$\mu(E_n)<\infty$，并且 $E=\bigcup_1^\infty E_n$。显然任一 σ- 有限集都有一列测度有限单调覆盖。

设 f 是 E 上的可测函数，令 $E_N = E(|f| \leqslant N)$，记 $[f]_N = f\chi_{E_N}$，称为 f 的截断函数。

我们有下面重要的

引理 1 设 $(X, \mathscr{R}, \mu)$ 是一个测度空间，E 是 σ- 有限集。又设 f 是 E 上非负可测函数，$\{E_n\}$ 是 E 的一列测度有限单调覆盖，$\{M_n\}$ 是趋于 $+\infty$ 的一个单调增数列，那么

$$\lim\int_{E_n}[f]_{M_n}\mathrm{d}\mu = \int_E f\mathrm{d}\mu。$$

证明：因为 $\{\int_{E_n}[f]_{M_n}\mathrm{d}\mu\}$ 是单调增数列，它的极限存在，记为 s（可能为 $+\infty$）。显然 $s \leqslant \int f\mathrm{d}\mu$，因此只要证 $s \geqslant \int f\mathrm{d}\mu$。

先设 $\int f\mathrm{d}\mu < \infty$，那么对任一 $\varepsilon > 0$，有非负简单函数 $\varphi \leqslant f$，使 $\int_E \varphi\mathrm{d}\mu > \int_E f\,\mathrm{d}\mu - \varepsilon$。记 $\varphi(x) = \Sigma_1^k \alpha_i\chi_{F_i}$，$A = \bigcup_1^k F_i$，$M = \max\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$，那么 $A \subset E$，$\mu(A) < \infty$，$\varphi \leqslant [f]_M$。当 $M_n \geqslant M$ 时，有

$$\begin{aligned}\int_E \varphi\,\mathrm{d}\mu = \int_A \varphi\,\mathrm{d}\mu &= \int_{A\cap E_n}\varphi\,\mathrm{d}\mu + \int_{A-E_n}\varphi\,\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \int_{E_n}[f]_{M_n} + M\mu(A - E_n) \\ &\leqslant s + M\mu(A - E_n)。\end{aligned} \tag{2}$$

因为 $\{A - E_n\}$ 是单调下降列，并且 $\bigcap_1^\infty(A - E_n) = A - \bigcup_1^\infty E_n = A - E = \varnothing$，又因为 $\mu(A - E_n) \leqslant \mu(A) < \infty$，由测度的上连续性有 $\mu(A - E_n) \to 0$。在(2)中令 $n \to \infty$ 得到

$$\int f\mathrm{d}\mu - \varepsilon = \int \varphi\,\mathrm{d}\mu \leqslant s。$$

令 $\varepsilon \to 0$ 即得 $\int f\mathrm{d}\mu \leqslant s$。

如果 $\int f\mathrm{d}\mu = \infty$，那么对任意的 K 有非负简单函数 $\varphi \leqslant f$ 使 $\int \varphi\mathrm{d}\mu > K$。用上面的证明同样可得 $s \geqslant K$。令 $K \to \infty$ 即得 $s = \infty$。

定理 4 设 $(X, \mathscr{R}, \mu)$ 是一个测度空间，$\{f_n\}$ 是 E 上的可测函数

列，$|f_n|\leqslant g$，g 是 E 上可测函数，如果 E 是 σ-有限集，f 在 E 上可测，$\{f_n\}$ 依测度收敛到 f，那么 f 在 E 上可积，并且

$$\lim\int_E f_n \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu。$$

证明：因为 $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$，所以有子列 $\{f_{n_k}\}$ 几乎处处收敛于 f。由定理 2，f 可积，并且

$$\lim_k\int_E f_{n_k} \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu。$$

因为 g 可积，对 $\varepsilon > 0$ 有 $\delta > 0$，当 $e \subset E$，$\mu(e) < \delta$ 时，有

$$\int_e g \mathrm{d}\mu < \varepsilon/4。$$

假设 $\mu(E) < \infty$，那么取 η 使 $\eta\mu(E) < \varepsilon/2$。令

$$A_n(\eta) = E(|f_n - f| \geqslant \eta),$$
$$B_n(\eta) = E(|f_n - f| < \eta),$$

那么存在 n_0，当 $n > n_0$ 时，有 $\mu(A_n(\eta)) < \delta$，从而

$$\int_{A_n(\eta)} g \mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{4}。$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\int_E f_n \mathrm{d}\mu - \int_E f \mathrm{d}\mu\right| &\leqslant \int_E |f_n - f| \mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \int_{A_n(\eta)} |f_n - f| \mathrm{d}\mu + \int_{B_n(\eta)} |f_n - f| \mathrm{d}\mu \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \eta\mu(E) < \varepsilon。\end{aligned}$$

如果 E 是 σ-有限集，那么 E 有一列测度有限单调覆盖 $\{E_k\}$，以及趋于 $+\infty$ 的单调增数列 $\{M_k\}$，因此

$$\int_{E-E_k} g \mathrm{d}\mu = \int_E g \mathrm{d}\mu - \int_{E_k} g \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g \mathrm{d}\mu - \int_{E_k} [g]_{M_k} < \frac{\varepsilon}{4}$$

对 E_k 有 n_0，当 $n > n_0$ 时，有

$$\left|\int_{E_k} (f_n - f) \mathrm{d}\mu\right| < \frac{\varepsilon}{2}。$$

由此可知，当 $n > n_0$ 时，有

$$\left|\int_E (f_n - f)\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \left|\int_{E_k} (f_n - f)\mathrm{d}\mu\right| + \left|\int_{E-E_k} (f_n - f)\mathrm{d}\mu\right|$$

$$\leqslant \left|\int_{E_k} (f_n - f)\mathrm{d}\mu\right| + \int_{E-E_k} 2g\mathrm{d}\mu$$

$$< \int_{E_k} |f_n - f|\mathrm{d}\mu + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon。$$

注 3 定理 4 中控制函数 g 的可积性是不可少的。例如在$(\boldsymbol{R}, \mathscr{L}, m)$ 上，取 $E = [0,\infty)$，$f_n = X_{[n,n+1)}$，那么 $f_n \to 0$。但是控制函数 $g(x) = \chi_{(0,\infty)}$ 在 E 上不可积，定理的结论也不成立，$\int f_n \mathrm{d}\mu = 1$，而 $0 = \int f \mathrm{d}m$。

下面几个定理是控制收敛定理的重要应用，为了叙述这些应用，我们先引入

定义 1 设$(X, \mathscr{R}, \mu)$是一个测度空间，$E \in \mathscr{R}$，$\{f_n\}$ 是 E 上可积函数列，f 也在 E 上可积，如果

$$\lim \int_E |f_n - f|\mathrm{d}\mu = 0,$$

那么称$\{f_n\}$ 平均收敛于 f。

定理 2 设$(X, \mathscr{R}, \mu)$是一个测度空间，f 是 E 上的可积函数，那么

1) 存在简单函数列$\{\varphi_n\}$ 使$\{\varphi_n\}$ 平均收敛于 f。

如果 $X = \boldsymbol{R}$，$\mathscr{R} = \mathscr{L}^g$，$\mu = \mu_g$，那么

2) 存在阶梯函数列平均收敛于 f；

3) 存在 $\boldsymbol{R}$ 上的连续函数列平均收敛于 f。

证明：1) 因为 f 可积，所以在 E 上几乎处处有限。由定理 1.4，存在简单函数列$\{\varphi_n\}$，使 $0 \leqslant |\varphi_1| \leqslant |\varphi_2| \cdots \leqslant |f|$，$\varphi_n \to f$。由控制收敛定理，对充分大的 n 有$\int |f - \varphi_n|\mathrm{d}\mu < \varepsilon$。

2) 设 $\varphi_n = \Sigma_1^{M_n} a_j^n \chi_{E_j^n}$ 是 1) 给出的简单函数列，$\{E_j^n\}_{j=1}^{M_n}$ 两两不交，

$a_j^n \neq 0$，那么 $\mu(E_j^n) = |a_j^n|^{-1}\int_{E_j} |\varphi_n| \mathrm{d}\mu \leqslant |a_j^n|^{-1}\int |f| \mathrm{d}\mu < \infty$，因此 E_j^n 皆有有限测度。为证 2) 只要证明对任意的 $\varepsilon > 0$，有阶梯函数 ψ_n 使 $\int |\psi_n - \varphi_n| \mathrm{d}\mu < \varepsilon$。为证明简单起见，不妨设 $M_n = 2$，也即设 $\varphi = a_1\chi_{E_1} + a_2\chi_{E_2}$，$E_1$、$E_2$ 不相交，有有限测度。记 $M = \max\{|a_1|, |a_2|\}$。由定理 Ⅱ.4.3，有开集 $U_i \supset E_i$，使 $\mu(U_i - E_i) < \varepsilon/12M$。记 $F_i = U_i - E_i$，那么

$$U_1 \cap U_2 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap E_2) \cup (F_1 \cap F_2)。$$

因此 $\mu(U_1 \cap U_2) \leqslant a\mu(F_1) + \mu(F_2) < \varepsilon/4M$。设 $U_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} O_j^{(i)}$，$m_i \leqslant \infty$。显然可以取有限的 $n_i \leqslant m_i$，记 $V_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} O_j^{(i)}$，使 $\mu(U_i - V_i) < \varepsilon/4M$。如果 $O_i^{(1)}$ 与 $O_j^{(2)}$ 相交，记 $O_i^{(1)} = (a,b)$，$O_j^{(2)} = (c,d)$。不妨设 $a < c < b < d$，那么用 (a,c) 取代 $O_i^{(1)}$，(b,d) 取代 $O_j^{(2)}$。在对 V_1、V_2 所有相交的构成区间作了如上所述的处理后可以假设 $V_1 \cap V_2 = \varnothing$，而且 $\mu(U_i - V_i) < \varepsilon/4M$。令 $\psi = a_1\chi_{V_1} + a_2\chi_{V_2}$，那么显然 ψ 是阶梯函数，并且

$$\int |\varphi - \psi| \mathrm{d}\mu \leqslant |a_1| \int |\chi_{E_1} - \chi_{V_1}| \mathrm{d}\mu + (a_2)\int |\chi_{E_2} - \chi_{V_2}| \mathrm{d}\mu。$$

而

$$\begin{aligned}\int |\chi_{E_1} - \chi_{V_1}| \mathrm{d}\mu &\leqslant \int |\chi_{E_i} - \chi_{v_i}| \mathrm{d}\mu + \int |\chi_{U_i} - \chi_{V_i}| \mathrm{d}\mu \\ &= \mu(U_i - E_i) + \mu(U_i - V_i) \\ &< \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2M},\end{aligned}$$

因此

$$\int |\varphi - \psi| \mathrm{d}\mu < \varepsilon。$$

3) 设 $\psi = \Sigma_{i=1}^{n} a_i\chi_{V_i}$ 是 2) 中的阶梯函数，使 $\int_E |f - \psi| \mathrm{d}m < \varepsilon/2$，

令 $M=\max\{|\alpha_1|,\cdots,|\alpha_n|\}$，那么 $|\psi|\leqslant M$。令 $\delta<\varepsilon/2M$，由定理1.7有 $\boldsymbol{R}$ 上的连续函数 h，使 $|h|\leqslant M, m(h\neq\psi)<\delta$。于是

$$\int_E|\psi-h|\mathrm{d}m<2M\delta<\varepsilon,$$

$$\int_E|f-h|\mathrm{d}m\leqslant\int|f-\psi|\mathrm{d}m+\int|\psi-h|\mathrm{d}m<\varepsilon。$$

定义 3 称勒贝格可测函数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 具有平均连续性，如果

$$\lim_{h\to0}\int_R|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}m=0。$$

定理 5 如果 f 在 $\boldsymbol{R}$ 上勒贝格可积，那么 f 具有平均连续性。

证明：因为 f 可积，所以对任一 $\varepsilon>0$，有 M 使

$$\int_{-\infty}^{-M+1}|f|\mathrm{d}m+\int_{M-1}^{+\infty}|f|\mathrm{d}m<\varepsilon/4$$

由定理2，有 $[-M-1,M+1]$ 上连续函数 g 使

$$\int_{-M-1}^{M+1}|f-g|\mathrm{d}m<\varepsilon/6。$$

因为 g 在 $[-M-1,M+1]$ 上均匀连续，所以有 $0<\delta<1$，当 $|h|<\delta$ 时，有

$$\int_{-M}^{M}|g(x+h)-g(x)|\mathrm{d}m<\varepsilon/6。$$

于是

$$\begin{aligned}\int_R|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}m&\leqslant\int_{-M}^{M}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}m\\&+\int_{-\infty}^{-M}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}m+\int_{M}^{+\infty}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}m\\&\leqslant\int_{-M}^{M}|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}m+2\int_{-\infty}^{-M+1}|f|\mathrm{d}m\\&\quad+2\int_{M-1}^{+\infty}|f|\mathrm{d}m\\&\leqslant\int_{-M}^{M}|f(x+h)-g(x+h)|\mathrm{d}m+\int_{-M}^{M}|g(x+h)\\&\quad-g(x)|\mathrm{d}m+\int_{-M}^{M}|g(x)-f(x)|\mathrm{d}m+\varepsilon/2<\varepsilon。\end{aligned}$$

下面我们讨论含参变量的勒贝格积分。

定理6 设 $f(x,t)$ 是矩形 $\{(x,t):a\leqslant x\leqslant b,\alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$ 上的函数($[a,b]$ 可以是无限区间),对任一 $t\in[\alpha,\beta]$,$f(x,t)$ 在$[a,b]$上可测,$F(x)$ 在$[a,b]$上勒贝格可积。

1) 如果 $\lim\limits_{t'\to t}f(x,t')=f(x,t)$ 在 $[a,b]$ 上处处成立,并且 $|f(x,t)|\leqslant F(x)$,那么当 $t\in[\alpha,\beta]$ 时,积分

$$I(t)=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$$

存在,并且是 t 的连续函数。

2) 如果 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 存在,并且 $\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|\leqslant F(x)$ 对所有的 x、t 成立,那么 $I(t)$ 可导,并且

$$I'(t)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x。$$

证明:1) 设 $\{t_n\}\subset[\alpha,\beta]$ 是收敛于 t 的任一数列,对 $f(x,t_n)$ 应用勒贝格控制收敛定理即得 1)。

2) 令

$$h_n(x)\doteq\frac{f(x,t_n)-f(x,t)}{t_n-t},$$

$h_n(x)$ 可测,并且 $h_n(x)\to\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$。由中值定理有

$$|h_n(x)|\leqslant\sup_{t\in[a,b]}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right|\leqslant F(x)。$$

对 h_n 应用控制收敛定理,即得

$$I'(t)=\lim\frac{I(t_n)-I(t)}{t_n-t}=\lim\int h_n(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x。$$

最后我们给出一个定理,它是勒贝格积分理论优于黎曼积分理论的重要例论之一,它不仅说明了勒贝格积分理论比黎曼积分理论应用范围更广,而且给出了有界函数黎曼可积的充要条件。

为了区别两种积分,我们用 $(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示函数 f 在区间$[a,$

b] 上的黎曼积分，用 $(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示 f 的勒贝格积分。

定理 7 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的有界函数。

1) 如果 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，那么 f 在 $[a,b]$ 上可测，从而在 $[a,b]$ 上勒贝格可积，并且

$$(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}m。$$

2) f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积的充要条件是 f 关于勒贝格测度几乎处处连续。

证明：1) 设 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，$D: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是 $[a,b]$ 的一个分划。令

$$\varphi(D) = \Sigma_1^n m_j \chi_{(x_{j-1},x_j]}, \psi(D) = \Sigma_1^n M_j \chi_{(x_{j-1},x_j)},$$

$$\underline{S}(D) = \Sigma_1^n m_j (x_j - x_{j-1}), \overline{S}(D) = \Sigma_1^n M_j (x_j - x_{j-1}),$$

其中 $m_j = \inf\{f(x): x \in (x_{j-1},x_j]\}$,

$$M_j = \sup\{f(x): x \in (x_{j-1},x_j]\}。$$

易见

$$\underline{S}(D) = (R)\int_a^b \varphi(D)\mathrm{d}x,$$

$$\overline{S}(D) = (R)\int_a^b \psi(D)\mathrm{d}x。$$

设 $\{D_n\}$ 是 $[a,b]$ 的一个分划序列，D_n 的分点都是 D_{n+1} 的分类（记为 $D_n \subset D_{n+1}$），并且分划的模 $\lambda(D_n) \to 0$。记 $\varphi_n = \varphi(D_n)$，$\psi_n = \psi(D_n)$，易见 $\{\varphi_n\}$ 单调增，$\{\psi_n\}$ 单调降，并且

$$(R)\int_a^b \varphi_n \mathrm{d}x \to (R)\int_a^b f\mathrm{d}x,$$

$$(R)\int_a^b \psi_n \mathrm{d}x \to (R)\int_a^b f\mathrm{d}x。$$

记 $\underline{f} = \lim\varphi_n$，$f = \lim\psi_n$，那么 $\underline{f} \leqslant f \leqslant \overline{f}$，并且 $\underline{f} \leqslant f \leqslant \overline{f}$。由积分的单调性有

$$(R)\int_a^b \varphi_n = (L)\int_a^b \varphi_n \leqslant (L)\int_a^b \underline{f}$$

$$\leqslant (L)\int_c^b \overline{f} \leqslant (L)\int_a^b \psi_n = (R)\int_a^b \psi_n。$$

因为 f 是黎曼可积的，$(R)\int_a^b (\psi_n - \varphi_n)\mathrm{d}x \to 0$。因此 $(L)\int_a^b (\overline{f} - \underline{f})\mathrm{d}m = 0$，从而 $\underline{f} \dot{=} f \dot{=} \overline{f}$。因为勒贝格积分是完全测度，由 $\underline{f}$ 的可测性可得到 f 是可测的。又因为 f 有界，因此 f 是勒贝格可积的，并且 $(L)\int_a^b f\mathrm{d}m = (L)\int_a^b \overline{f}\,\mathrm{d}m = (R)\int_a^b f\mathrm{d}x$。

2) 设 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，由 1) 的证明可知 $\underline{f} \underset{m}{\dot{=}} f \underset{m}{\dot{=}} \overline{f}$。记 $E_1 = \{x \in [a,b]: \underline{f} \neq f$ 或 $f \neq \overline{f}\}$，那么 $m(E_1) = 0$。令 E_2 是 $\{D_n\}$ 所有分点的集合，它是可列集，因此 $E_0 = E_1 \cup E_2$ 是勒贝格零测度集。下

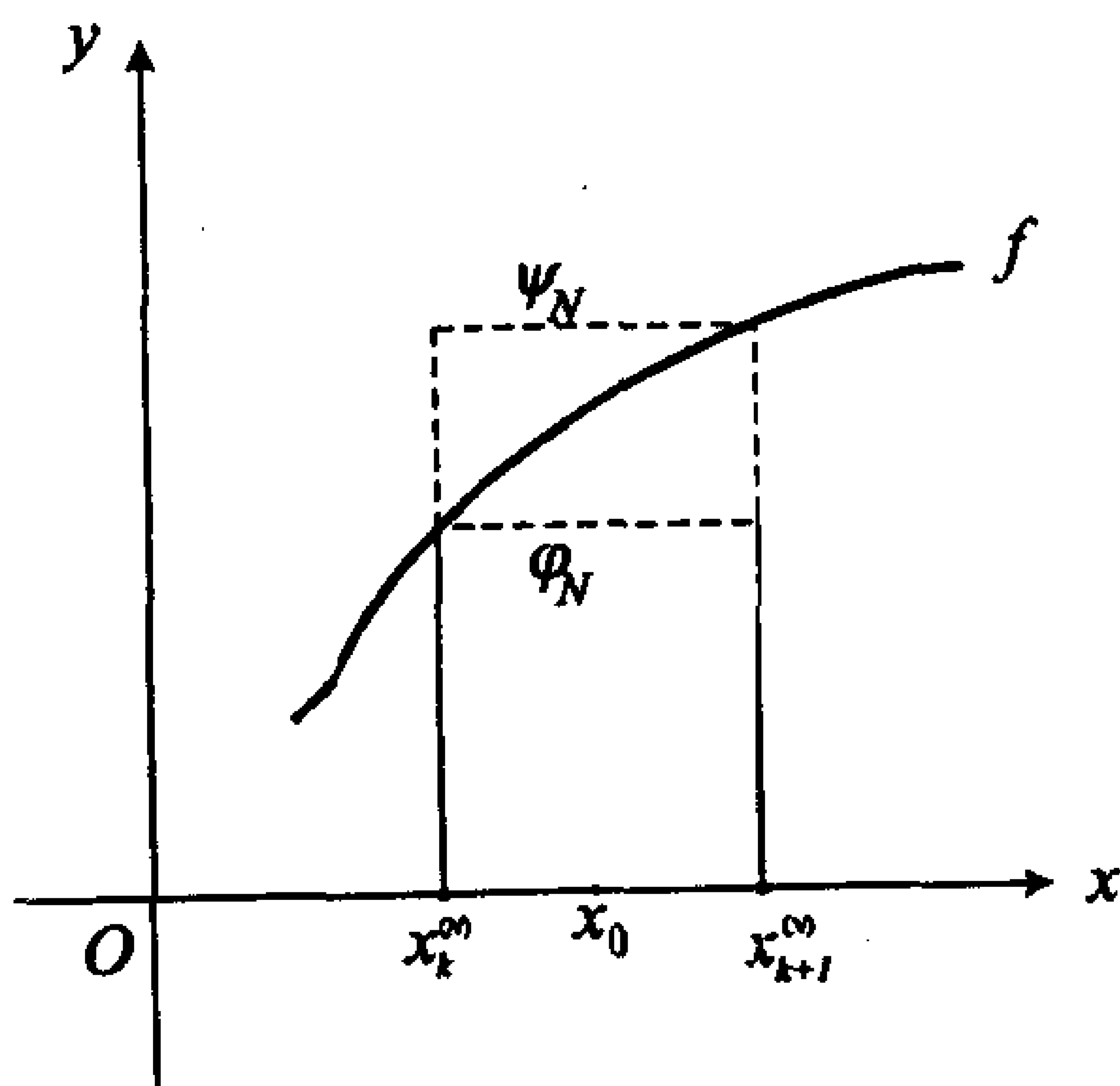


图 1

面证明如果 $x_0 \overline{\in} E_0$，那么 f 在 x_0 连续(见图1)。对 $\varepsilon > 0$ 有自然数 N，使 $f(x_0) - \varphi_N(x_0) < \varepsilon, \psi_N(x_0) - f(x_0) < \varepsilon$。又因为 x_0 不是分点，必落在某两个分点 $x_k^{(N)}$、$x_{k+1}^{(N)}$ 之间。令 $\delta = \min\{x_{k+1}^{(N)} - x_0, x_0 - x_k^{(N)}\}$，那么当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时有

$$f(x) \leqslant \psi_N(x) = \psi_N(x_0),$$

$$f(x) \geqslant \varphi_N(x) = \varphi_N(x_0)。$$

于是

$$f(x_0)-\varepsilon\leqslant f(x)\leqslant f(x_0)+\varepsilon, \tag{2}$$

也即 f 在 x_0 连续。

反过来，假设 f 在$[a,b]$上几乎处处连续，记 f 的连续点的全体为 E_3，那么 $m(E_3)=b-a$。当 $x_0\in E_3$ 时，对 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，使当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时(3)式成立。任取一列分划$\{D_n\}$，使 $D_n\subset D_{n+1}$。当 $\lambda(D_n)<\delta$ 时，对某个 i 有 $x_0\in(x_i^{(n)},x_{i+1}^{(n)}]\subset(x_0-\delta,x_0+\delta)$。因此

$$f(x_0)-\varepsilon\leqslant\varphi_n(x_0)\leqslant f(x_0)\leqslant\psi_n(x_0)\leqslant f(x_0)+\varepsilon,$$

从而 $\psi_n(x_0)-\varphi_n(x_0)<2\varepsilon$。这表明$\{\varphi_n(x_0)\}$，$\{\psi_n(x_0)\}$收敛于 $f(x_0)$。记 $\underline{f}(x_0)=\lim\varphi_n(x_0)$，$\overline{f}(x_0)=\lim\psi_n(x_0)$，那么

$$\underline{f}(x_0)=f(x_0)=\overline{f}(x_0)。$$

定义

$$\underline{f}(x)=\begin{cases}\lim\varphi_n(x) & 对\ x\in E_3,\\ 0 & x\overline{\in}E_3,\end{cases}$$

$$\overline{f}(x)=\begin{cases}\lim\psi_n(x) & 对\ x\in E_3,\\ 0 & x\overline{\in}E_3,\end{cases}$$

那么 $\underline{f}\doteq f\doteq\overline{f}$。

由于 f 在$[a,b]$上有界，有常数 K 使 $|\varphi_n(x)|\leqslant K$，$|\psi_n(x)|\leqslant K$。又因为 $\varphi_n\xrightarrow{\cdot}f$，$\psi_n\xrightarrow{\cdot}f$，由控制收敛定理有

$$\underline{S}(D_n)=(R)\int_a^b\varphi_n\mathrm{d}x=(L)\int_a^b\varphi_n\mathrm{d}m\to(L)\int_a^b f\mathrm{d}m,$$

$$\overline{S}(D_n)=(R)\int_a^b\psi_n\mathrm{d}x=(L)\int_a^b\psi_n\mathrm{d}m\to(L)\int_a^b f\mathrm{d}m。$$

因此 $\lim\underline{S}(D_n)=\lim\overline{S}(D_n)$，也即 f 黎曼可积。

习　　题

A　类

1. 设 f 是 $\boldsymbol{R}$ 上勒贝格可积函数，证明 $\Sigma_{-\infty}^{\infty} f(n^2 x)$ 必在 $\boldsymbol{R}$ 上几乎处处（关于 m）等于一个勒贝格可积函数。

2. 设 f 在 $(\boldsymbol{R}, \mathscr{L}^g, \mu_g)$ 上可积，$f(0)=0$，试举出一个 g，说明题 1 对 μ_g 不成立。

3. 设 f 在 $(0,\infty)$ 上勒贝格可积，均匀连续，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=0$。举例说明均匀连续条件不可去掉。

4. 设 f 在 $\boldsymbol{R}$ 上勒贝格可测，并且在任何有限区间 (a,b) 上可积，$h(x)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上有 n 阶连续导函数，在 $(-M,M]$ 外为零。证明 $(f*h)(t)=\int f(x+t)h(x)\mathrm{d}x$ 有 n 阶导数。

5. 设 $\{f_n\}$ 是 E 上可积函数列，$\Sigma_1^{\infty}\int_E |f_n| < \infty$，那么 $\Sigma_1^{\infty} f_n$ 收敛到一个 E 上的可积函数，并且 $\int_E \Sigma_1^{\infty} f_n = \Sigma_1^{\infty}\int_E f_n$。

6. 设 $\{f_n\}$ 是 $(X,\mathscr{R})$ 可测集 E 上可测函数列，μ 是 $(X,\mathscr{R})$ 上的测度，如果存在 E 上可积函数 F，使 $|f_n| \leqslant F (n=1,2\cdots)$，$f_n \underset{E}{\dot{\rightarrow}} f$，那么必有 $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$。

7. 设 $f:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ 有界，令 $H(x)=\overline{\lim\limits_{y\to x}} f(y)$，$h(x)=\overline{\lim\limits_{y\to x}} f(y)$ 那么

1) $H(x)=h(x)$ 当且仅当 f 在 x 连续，

2) $H \doteq \overline{f}, h \doteq \underline{f}$，

3) 由此证明定理 6.2)。

8. 如果 $f_n(x)=a\mathrm{e}^{-nax}-b\mathrm{e}^{-nbx}$，这里 $0<a<b$，那么 $\Sigma_1^{\infty}\int_0^{\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x=\infty$，并且 $\Sigma_1^{\infty}\int_0^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \neq \int_0^{\infty}\Sigma_1^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$。

9. 计算：

1) $\lim\int_0^{\infty}(1+\frac{x}{n})^{-n}\sin\frac{x}{n}dx$，

2) $\lim\int_0^1(1+nx^2)(1+x^2)^{-n}dx$，

3) $\lim\int_0^{\infty}n\sin\frac{x}{n}[x(1+x^2)]^{-1}dx$，

4) $\lim\int_a^{\infty}n(1+n^2x^2)dx$ （分别考虑 $a<0, a=0, a>0$）。

10. 证明：

1) $\lim\int_0^{\infty}(1+\frac{t}{n})^{-n}t^{-\frac{1}{n}}dx=1$，

2) $\lim\int_0^{\infty}\frac{\lg^p(x+n)}{n}e^{-x}\cos x dx=0$ （p 为任意固定正数）。

11. 1) 利用对 $\int_0^{\infty}e^{-tx}dt=\frac{1}{x}$ 进行微分，证明 $\int_0^{\infty}x^ne^{-x}dx=n!$，

2) 假设已知 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$，证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^{2n}x^{-x^2}dz=(2n)!/4^nn!\sqrt{\pi},$$

3) 证明 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_0^k x^n(1-\frac{x}{k})^kdx=n!$。

B 类

1. 设 f 在 $\mathbf{R}$ 上勒贝格可积，$\alpha\in\mathbf{R}$，定义

$$\mathcal{J}(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}f(x)dx,$$

证明 $\lim\limits_{\alpha\to\pm\infty}\mathcal{J}(\alpha)=0$。

2. 试从 Fatou 定理推出控制收敛定理。

3. 计算 $\int_0^1(1+x)^{-1}\log x dx$。

4. 证明一致收敛的 R- 可积函数列的极限函数也是 R- 可积的。

5. 设 f_n、g_n、f、g 都在 E 上可积，$|f_n| \leqslant g_n$，$f_n \dot{\to} f$，$\int g_n \to \int g$，那么 $\int f_n \to \int f$。

6. 设 f_n、f 在 E 上可积 $f_n \dot{\to} f$，那么 $\int |f_n - f| \to 0$ 当且仅当 $\int |f_n| \to \int |f|$。

7. 利用级数展开证明

1) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos ax \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} e^{-\frac{a^2}{4}} (a > 0)$，

2) $\int_0^1 x^p (x-1)^{-1} \mathrm{d}x = \Sigma_1^{\infty} (p+k)^{-2} (p > -1)$，

3) $\int_0^{\infty} e^{-sx} x^{-1} \sin x \mathrm{d}x = \arctan s^{-1} (s > 1)$。

第五节　乘积测度与富比尼定理

本节我们将讨论重积分和累次积分。为此首先讨论乘积 σ- 代数。

定义 1　设 X_1、X_2 是两个基本集，定义从积集 $X_1 \times X_2$ 到 X_i 的映射 Π_i：

$$\Pi_i(x_1, x_2) = x_i \quad (i = 1, 2),$$

称 Π_i 为积集 $X_1 \times X_2$ 的坐标映射，称 x_1、x_2 为 (x_1, x_2) 的坐标。

易见对 $E_1 \subset X_1$，$E_2 \subset X_2$ 有

$$\Pi_1^{-1}(E_1) = E_1 \times X_2,$$

$$\Pi_2^{-1}(E_2) = X_1 \times E_2。$$

定义 2　设 $(X_i, A_i)(i = 1, 2)$ 是可测空间，$\mathscr{A}_i$ 是 σ- 代数，称由集类

$$\mathscr{F} = \{\Pi_i^{-1}(E_i) : E_i \in \mathscr{A}_i, i = 1, 2\}$$

生成的 σ- 代数 $\mathscr{A}(\mathscr{F})$ 为 $X_1 \times X_2$ 上的乘积 σ- 代数，记为 $\mathscr{A}_1 \times$

$\mathscr{A}_2$。

命题1 设$\mathscr{A}_1$、$\mathscr{A}_2$是σ-代数，那么乘积代数$\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$也是由集类$\mathscr{G} = \{E_1 \times E_2 : E_i \in \mathscr{A}_i\}$生成的$\sigma$-代数（形如$E_1 \times E_2$的集称为矩形）。

证明：因为$X_i \in \mathscr{A}_i$，所以$\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$，从而$\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 \subset \mathscr{A}(\mathscr{G})$。另一方面，$E_1 \times E_2 = \Pi_1^{-1}(E_1) \cap \Pi_2^{-1}(E_2)$，因此$\mathscr{G} \subset \mathscr{A}(\mathscr{G})$，从而$\mathscr{A}(\mathscr{Y}) \subset \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$。

命题2 设$\mathscr{A}_i$是由集类$\mathscr{E}_i$生成的σ-代数，令$\mathscr{F}_0 = \{\Pi_i^{-1}(E_i) : E_i \in \mathscr{E}_i, i = 1,2\}$，$\mathscr{G}_0 = \{E_1 \times E_2 : E_i \in \mathscr{E}_i\}$，那么$\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 = \mathscr{A}(\mathscr{F}_0)$。当$X_i \in \mathscr{E}_i$时，$\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 = \mathscr{A}(\mathscr{G}_0)$。

证明：由定义2有$\mathscr{A}(\mathscr{F}_0) \subset \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$。再证反方向的包含关系，定义辅助集类$\mathscr{M}_i = \{E \subset X_i : \Pi_i^{-1}(E) \in \mathscr{A}(\mathscr{F}_0)\}$。易证$\mathscr{M}_i$是$X_i$上的$\sigma$-代数，并且$\mathscr{E}_i \subset \mathscr{M}_i$，因此$\mathscr{A}_i \subset \mathscr{M}_i$。这表明对$E_i \in \mathscr{A}_i$，有$\Pi_i^{-1}(E_i) \in \mathscr{A}(\mathscr{F}_0)$。由定义2有$\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 = \mathscr{A}(\mathscr{F}_0)$，所以$\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 = \mathscr{A}(\mathscr{F}_0)$，命题的前一半得证。

由命题1有$\mathscr{A}(\mathscr{G}_0) \subset \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$。另一方面，$\Pi_1^{-1}(E_1) = E_1 \times X_2 \in \mathscr{G}_0$，$\Pi_2^{-1}(E_2) = X_1 \times E_2 \in \mathscr{G}_0$，因此$\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{G}_0$，所以$\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 = \mathscr{A}(\mathscr{F}_0) \subset \mathscr{A}(\mathscr{G}_0)$。

现在考察直线和平面上的波雷耳代数。用$\mathscr{B}_{R^2}$表示实平面R^2上所有开集生成的σ-代数（平面上的波雷耳代数），那么有

命题3 $\mathscr{B}_{R^2} = \mathscr{B}_R \times \mathscr{B}_R$。

证明：记$\mathscr{E} = \{$开区间全体，包括$(-\infty,\infty)\}$，由命题Ⅰ.4.1可知$\mathscr{B}_R = \mathscr{A}(\mathscr{E})$。令$\mathscr{G}_0 = \{E_1 \times E_2 : E_i \in \mathscr{E}_i, i = 1,2\}$，由命题2有$\mathscr{B}_R \times \mathscr{B}_R = \mathscr{A}(\mathscr{G}_0)$。另一方面因为平面上任一开集可以表为$\mathscr{G}_0$中集的可列和，因此$\mathscr{B}_{R^2} = \mathscr{A}(\mathscr{G}_0)$，所以$\mathscr{B}_{R^2} = \mathscr{B}_R \times \mathscr{B}_R$。

设$(X,\mathscr{S},\mu)$，$(Y,\mathscr{T},\nu)$是两个测度空间，我们将在$X \times Y$上的σ-代数$\psi \times \mathscr{T}$上定义一个（乘积）测度。令$\mathscr{G} = \{E \times F : E \in \mathscr{S}, F \in \mathscr{T}\}$，令$\mathscr{R}$是$\mathscr{G}$中元的有限并的全体，在$\mathscr{R}$上定义一个函数$\lambda$：

$$\lambda(\bigcup_1^n E_i \times F_i) = \Sigma_1^n \mu(E_i)\nu(F_i),$$

这里$\{E_i \times F_i\}_1^n$互不相交。不难证明λ是$\mathscr{R}$上的有限可加函数。由定理 Ⅰ.3.2可知存在R^2上的外测度λ^*和λ^*－可测集全体组成的σ-代数$\mathscr{M}$，使λ^*是$\mathscr{M}$上的完全测度，而且$\mathscr{M} \supset \mathscr{A}(\mathscr{G}) = \mathscr{S} \times \mathscr{T}$。

定义 3　λ^*在$\mathscr{S} \times \mathscr{T}$上的限制称为$\mu$与$\nu$的乘积测度，记为$\mu \times \nu$。

注1　$\mu \times \nu$是$\mathscr{M}$上的完全测度，但未必是$\mathscr{S} \times \mathscr{T}$上的完全测度。

定义 4　设$E \subset X \times Y$，记

$E_x = \{y \in Y:(x,y) \in E\}$，

$E^y = \{x \in X:(x,y) \in E\}$，

分别称为E的X－截口，Y－截口。如果f是$X \times Y$上的函数，那么称

$$f_x(y) = f(x,y), f^y(x) = f(x,y)$$

为f的X－截口，Y－截口，它们分别是定义在$E_x \subset Y$和$E^y \subset X$上的函数。

命题 4　设$(X,\mathscr{S})$，$(Y,\mathscr{T})$是两个可测空间，$\mathscr{S}$、$\mathscr{T}$是σ-代数。

1) 如果$E \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$，那么对任一$x \in X, y \in Y, E_x \in \mathscr{T}, E^y \in \mathscr{S}$，

2) 如果f在E上$\mathscr{S} \times \mathscr{T}$可测，那么$f_x$在$E_x$上$\mathscr{T}$可测，$f^y$在$E^y$上$\mathscr{S}$可测。

证明：1) 令$\mathscr{R} = \{E \subset X \times Y: E_x \in \mathscr{T}, E^y \in \mathscr{S}\}$，那么$\mathscr{R} \supset \mathscr{G} = \{A \times B: A \in \mathscr{S}, B \in \mathscr{T}\}$。又因为$(\bigcup E_j)_x = \bigcup (E_j)_x, (E_x)^c = (E^c)_x$，所以$\mathscr{R}$是一个$\sigma$-代数。因此$\mathscr{R} \supset \mathscr{S} \times \mathscr{T}$，这表明1)成立。

2) 对$\boldsymbol{R}$中的任一波雷耳集B有

$$\begin{aligned}(f_x)^{-1}(B) &= \{y \in E_x: f(x,y) \in B\} \\ &= \{y \in E_x: (x,y) \in E, f(x,y) \in B\} \\ &= (f^{-1}(B))_x,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(f_y)^{-1}(B) &= \{x \in E^y : f(x,y) \in B\} \\
&= \{y \in E^y : (x,y) \in E, f(x,y) \in B\} \\
&= (f^{-1}(B))^y 。
\end{aligned}
$$

因为 f 是 $\mathscr{S} \times \mathscr{T}$ 可测的，所以 $f^{-1}(B) \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$。由 1) 有 $(f^{-1}(B))_x \in \mathscr{T}$，$(f^{-1}(B))^y \in \mathscr{S}$，由此即得 2)。

现在我们可以讨论二元函数 f 的重积分和累次积分了。我们先讨论平面区域测度的累次积分表示，这实际上是平面区域的特征函数的重积分和累次积分的关系。

定理 1 设 $(X,\mathscr{S},\mu)$ 和 $(Y,\mathscr{T},\nu)$ 是 σ- 有限测度空间，如果 $E \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$，那么函数 $x \to \nu(E_x)$，$y \to \mu(E^y)$ 分别是 X,Y 上的可测函数，并且

$$
\mu \times \nu(E) = \int \nu(E_x) \mathrm{d}\mu(x) = \int \mu(E^y) \mathrm{d}\gamma(y) 。 \tag{1}
$$

证明：先设 $\mu(X)$，$\nu(Y)$ 有限。令 $\mathscr{M} = \{E \in \mathscr{S} \times \mathscr{T} : \nu(E_x)$，$\mu(E^y)$ 分别是 X,Y 上的可测函数，并且(1) 成立}。易见 $\mathscr{M} \supset \mathscr{G} = \{A \times B : A \in \mathscr{S}, B \in \mathscr{T}\}$。由积分的线性性和测度的有限可加性可知 $\mathscr{M} \supset \mathscr{R}(\mathscr{G})$（$\mathscr{G}$ 生成的环）。如果能证明 $\mathscr{M}$ 是单调类，那么由推论 Ⅰ·1·2 可知 $\mathscr{M} \supset \mathscr{S}(\mathscr{G})$（$\mathscr{G}$ 生成的 σ_- 代数）$= \mathscr{S} \times \mathscr{T}$。

设 $\{E_n\} \subset \mathscr{M}$ 是一个单调增列，$E = \bigcup E_n$，令 $f(y) = \mu(E^y)$，$f_n(y) = \mu(E_n^y)$，那么 $f_n(y)$ 可测，并且由测度 μ 的下连续性可知 $f_n(y)$ 单调增趋于 $f(y)$，因此 $f(x)$ 可测。由勒维引理和测度的下连续性有

$$
\begin{aligned}
\mu \times \nu(E) &= \lim \mu \times \nu(E_n) = \lim \int \mu(E_n^y) \mathrm{d}\nu(y) \\
&= \int \mu(E^y) \mathrm{d}\nu(y) 。
\end{aligned}
$$

类似地可以证明

$$
\mu \times \nu(E) = \int \nu(E_x) \mathrm{d}\mu(x) 。
$$

因此 $E \in \mathscr{M}$。如果 $\{E_n\} \subset \mathscr{M}$ 是一个单调降列，$E = \bigcap E_n$。令 $f(y) = \mu(E^y)$，$f_n(y) = \mu(E_n^y)$，那么 $\{f_n\}$ 是可测函数的单调降列，$|f_n| \leqslant$

$\mu(X)<\infty,\mu(Y)<\infty$。由有界收敛定理有

$$\int\mu\times\nu(E)=\int\mu(E^y)\mathrm{d}\nu(y)。$$

同理可证 $\mu\times\nu(E)=\int\nu(E_x)\mathrm{d}\mu(x)$，因此 $E\in\mathscr{M}$，所以 $\mathscr{M}$ 是一个单调类。

如果 X、Y 是 σ-是有限的，那么 $X\times Y$ 有一列测度有限单调覆盖 $\{X_i\times Y_i\}$。设 $E\in\mathscr{S}\times\mathscr{T}$，对 $E\cap(X_i\times Y_i)$ 应用上面的论证，得到

$$\begin{aligned}\mu\times\nu(E\cap(X_i\times Y_i))&=\int\chi_{X_j}(x)\nu(E_x\cap Y_i)\mathrm{d}\mu(x)\\&=\int\chi_{Y_j}(y)\mu(E^y\cap X_i)\mathrm{d}\nu(y)。\end{aligned}$$

用积分的下连续性和勒维引理即得(1)。

定理 2(**富比尼—托耐利**(Fubini—Tonelli)**定理**) 设 $(X,\mathscr{S},\mu)$，$(Y,\mathscr{T},\nu)$ 是 σ-有限测度空间，$E\in\mathscr{S}\times\mathscr{T}$。

1)(**托耐利**) 如果 f 在 E 上非负可测，那么函数 $g(x)=\int_{\Pi_2(E)}f_x(y)\mathrm{d}\nu(y)$，$h(y)=\int_{\Pi_1(E)}f^y(x)\mathrm{d}\mu(x)$ 分别是 $\Pi_1(E)$，$\Pi_2(E)$ 上非负可测函数，并且

$$\begin{aligned}\int_E f\mathrm{d}\mu\times\nu&=\int_{\Pi_1(E)}\Big[\int_{\Pi_2(E)}f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\Big]\mathrm{d}\mu(x)\\&=\int_{\Pi_2(E)}\Big[\int_{\Pi_1(E)}f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\Big]\mathrm{d}\nu(y)。\end{aligned}\tag{2}$$

2)(**富比尼**) 如果 f 在 E 上可积，那么对几乎处处的 x，f_x 在 $\Pi_2(E)$ 上可积，对几乎处处的 y，$f^y(x)$ 在 $\Pi_1(E)$ 上可积，几乎处处有定义的函数 $g(x)=\int f_x\mathrm{d}\nu$ 和 $h(y)=\int f^y\mathrm{d}\mu$ 分别在 $\Pi_1(E)$ 和 $\Pi_2(E)$ 上可积，并且(2)成立。

3)(**富比尼**) 如果 f 在 E 上 $\mathscr{S}\times\mathscr{T}$ 可测，而且 $|f|$ 的两个累次积分 $\int(\int|f|\mathrm{d}\mu)\mathrm{d}\nu$，$\int(\int|f|\mathrm{d}\nu)\mathrm{d}\mu$ 中有一个有限，那么另一个累次积

分以及二重积分$\iint|f|\mathrm{d}\mu\times\nu$也有限，并且(2) 成立。

证明：1) 由定理1可知结论1) 对$(X\times Y,\mathscr{S}\times\mathscr{T})$上的特征函数成立。由积分的线性性和测度的可加性可知 1) 对简单函数也成立。因为f非负可测，由定理1.4，存在简单函数列$\{\varphi_n\}$单调增收敛于f。由定理 1 可知$(\varphi_n)_x(y)\nu$- 可积，$(f_n)^y(x)\mu$- 可积，并且

$$g_n(x)=\int(\varphi_n)_x\mathrm{d}\nu,$$

$$h_n(y)=\int(\varphi_n)^y\mathrm{d}\mu$$

是可测函数的增序列。由勒维引理可知$g_n\to g,h_n\to h$，因此g,h可测。再次应用勒维引理即得

$$\int f\mathrm{d}\mu\times\nu=\lim\int f_n\mathrm{d}\mu\times\nu=\lim\int(\int(f_n)_x\mathrm{d}\gamma)\mathrm{d}\mu$$

$$=\lim\int g_n\mathrm{d}\mu=\int g\mathrm{d}\mu,$$

$$\int f\mathrm{d}\mu\times\nu=\lim\int f_n\mathrm{d}\mu\times\nu=\lim\int(\int(f_n)^y\mathrm{d}\mu)\mathrm{d}\nu$$

$$=\lim\int h_n\mathrm{d}\mu=\int h\mathrm{d}\nu。$$

2) 先设f非负可积，那么由(2) 可知$g(x)<\infty,h(x)<\infty$，也即f_x对几乎处处的x ν— 可积，f^y对几乎处处的y μ— 可积。对一般的可积函数分别考虑f^+和f^-，由上面的结论有

$$\int_E f^{\pm}\,\mathrm{d}\mu\times\nu=\int_{\Pi_1(E)}[\int_{\Pi_2(E)}f^{\pm}\,(x,y)\mathrm{d}\nu(y)]\mathrm{d}\mu(x)$$

$$=\int_{\Pi_2(E)}[\int_{\Pi_1(E)}f^{\pm}\,(x,y)\mathrm{d}\mu(x)]\mathrm{d}\nu(y)。$$

再利用积分的线性性即得(2)。

3) 先设$\mu\times\nu(E)<\infty$，f非负。此时不妨设累次积分$\int(\int f\mathrm{d}\mu)\mathrm{d}\nu<\infty$。取$f$的截断函数$[f]_N$，它是一个有界二元可测函数，因此在$E$上关于$\mu\times\nu$的重积分有限。由 2) 有

$$\int[f]_N\mathrm{d}\mu\times\nu=\int(\int[f]_N\mathrm{d}\mu)\mathrm{d}\nu\leqslant\int(\int f\mathrm{d}\mu)\mathrm{d}\nu。$$

对$\{[f]_N\}$用勒维引理有$\int f\mathrm{d}\mu\times\nu<\infty$。再用 2) 可知另一个累次积分存在，并且两个累次积分都等于二重积分。

对于一般的二元函数 f，可以分别考虑 f^+, f^-，这样我们在 $\mu\times\nu(E)<\infty$ 的情况下证明了 3)。

如果 E 是 σ- 有限的，那么存在一列测度有限单调覆盖 $\{E_i\}$。因为 $|f|$ 在 E 上可积，更在 E_i 上可积。由上面的讨论有

$$\begin{aligned}\int_{E_i} f^{\pm}\,\mathrm{d}\mu\times\nu &= \int_{\Pi_1(E_i)}\Big(\int_{\Pi_2(E_i)} f^{\pm}\,\mathrm{d}\nu\Big)\mathrm{d}\mu \\ &= \int_{\Pi_2(E_i)}\Big(\int_{\Pi_1(E_i)} f^{\pm}\,\mathrm{d}\mu\Big)\mathrm{d}\nu \\ &= \int_E\Big(\chi_{\Pi_1(E_i)}(x)\int_{\Pi_2(E_i)} f^{\pm}\,\mathrm{d}\nu\Big)\mathrm{d}\mu \\ &= \int_E\Big(\chi_{\Pi_2(E_i)}(g)\int_{\Pi_1(E_i)} f^{\pm}\,\mathrm{d}\mu\Big)\mathrm{d}\nu。\end{aligned}$$

对上式用勒维定理及推论 3.2 即得

$$\int_E f^{\pm}\,\mathrm{d}\mu\times\nu = \int\Big(\int f^{\pm}\,\mathrm{d}\nu\Big)\mathrm{d}\mu = \int\Big(\int f^{\pm}\,\mathrm{d}\mu\Big)\mathrm{d}\nu,$$

由此即得 2)。

注 2 1) 为简单起见，在(2) 中我们常省略括号而简记为

$$\begin{aligned}\iint f\mathrm{d}\mu\times\nu &= \iint f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\nu(y) \\ &= \iint f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\mathrm{d}\mu(x)。\end{aligned}$$

2)E 的 σ- 有限性是不可少的，因为定理 2 的证明用到了定理 1。现在举一反例：设 $X=Y=[0,1]$，$\mathscr{S}=\mathscr{T}=\mathscr{B}_{[0,1]}$，$\mu$ 为勒贝格测度，ν 为计数测度，$D=\{(x,y)\in X\times Y, x=y\}$，那么

$$\int_Y\int_X \chi_D\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu = 0,\ \int_X\int_Y \chi_D\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\mu = 1,\ \int_{X\times Y}\chi_D\mathrm{d}\mu\times\nu=\infty。$$

3) 托耐利定理中 f 的非负性不可少。例如令 $X=Y=N$，$\mathscr{S}=\mathscr{T}=\mathscr{P}(N)$，$\mu=\nu$ 是计数测度，定义

$$f(m,n)=\begin{cases}1 & m=n,\\ -1 & m=n+1,\\ 0 & 其他,\end{cases}$$

那么

$$\iint\limits_{YX} f\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu=0,\ \iint\limits_{XY} f\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\mu=1,\ \int\limits_{X\times Y}|f|\mathrm{d}\mu\times\nu=\infty。$$

习　　题

A　类

1. 证明矩形满足下面的性质：

1) 矩形 E 是空集的充要条件是它至少有一个边是空集；

2) 如果 $E_i=A_i\times B_i(i=1,2)$ 都是非空矩形，那么 $E_1\subset E_2$ 的充要条件是 $A_1\subset A_2,B_1\subset B_2$，特别，$E_1=E_2$ 的充要条件是 $A_1=A_2$，$B_1=B_2$；

3) 如果 $E=A\times B,E_i=A_i\times B_i(i=1,2)$ 都是非空矩形，那么 $E=E_1\cup E_2$ 而且 $E_1\cap E_2=\varnothing$ 的充要条件是下面两个情形之一必然成立：

1°$A=A_1\cup A_2,A_1\cap A_2=\varnothing$，且 $B=B_1=B_2$；

2°$B=B_1\cup B_2,B_1\cap B_2=\varnothing$，且 $A=A_1=A_2$。

2. 证明：

1) 对任何一族集 $\{E_\lambda,\lambda\in\Lambda\}(E_\lambda\subset X\times Y)$，以及任何 $x_0\in X$，$(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda)_{x_0}=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}E_{\lambda x_0}$；

2) 对任何 $E,F\subset X\times Y$，以及任何 $x_0\in X,(E-F)_{x_0}=E_{x_0}-F_{x_0}$；

3) 设 A 是直线上勒贝格可测集，证明平面 R^2 上的集 $E=\{(x,y):x-y\in A\}$ 是 $(R^2,(\mathscr{L}\times\mathscr{L})^*,m\times m)$ 的可测集，特别当 $m(A)=0$ 时，那么 $m\times m(E)=0$。

4. 当 f、h 是 R 上勒贝格可积函数时，证明函数

$$(f * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)h(x)\mathrm{d}x$$

是 $\boldsymbol{R}$ 上勒贝格可积函数，并且$\widetilde{f*h} = \tilde{f} \cdot h$，这里 $\tilde{f}$ 是 f 的傅里叶(Fourier) 变换。又如果当 f,h 中有一个是有界，另一个可积，那么$(f*h)$ 是(t) 的连续函数。

5. 设$k(x,y)$是按平面勒贝格测度在$[0,1]\times[0,1]$上的可积函数，固定 y,$k(x,y)$ 是 x 的连续函数，问函数 $\varphi(y) = \int_0^1 k(x,y)\mathrm{d}x$ 是否是$[0,1]$ 上连续函数？

B 类

1. 如果$f(s,t)$是有限矩形$[a,b]\times[c,d]$上的勒贝格可积函数，证明必可用 1) 平面上的阶梯函数(在有限矩形上分别为常数)，2) 平面上三角多项式按积分逼近，即对任一 $\varepsilon > 0$，有上述函数 φ 使$\int_c^d\int_a^b |f - \varphi|\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \varepsilon$。

2. 设$\mathscr{P}$是平面上左下开右上闭矩形全体，$\mathscr{R}$是$\mathscr{P}$生成的σ-环，$E \in \mathscr{R}$ 称为平面波雷耳集，证明平面上开圆、闭圆、三角形、开平行四边形、可列集、扇形等均为波雷耳集。

3. 问习题 1 对无限矩形是否成立？

4. 习题 1 如何推广到两个勒贝格 — 斯蒂阶测度的乘积测度的情形？

5. 证明$(\boldsymbol{R}^2,(\mathscr{L}\times\mathscr{L})^*,m\times m)$就是第二章第一节例3所引入的平面上的环 $\mathscr{R}_0^2$ 上勒贝格测度按卡拉泰屋独利条件扩张所得的平面上的完全测度空间。

6. 设 ψ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 上二元函数，固定一个变元时，它是另一个变元的右连续函数，并且对平面上任何有限矩形 $E = (a,b]\times(c,d]$，满足

$$\Delta = \psi(b,d) - \psi(b,c) - \psi(a,d) + \psi(a,b) \geqslant 0。$$

证明：当规定 $\psi(E) = \Delta$ 时，$\psi(E)$ 是 $\mathscr{R}_0$ 上测度。

7. 设$(X,\mathscr{M},\mu)$ 是 σ- 有限测度空间，f 在 X 上非负可测，令 G_f

$= \{(x,y) \in X \times [0,\infty]: 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$，那么 G_f 是 $\mathscr{M} \times \mathscr{B}_R$ 可测的，而且 $\mu \times m(G_f) = \int f \mathrm{d}\mu$。

8. 设 $(X,\mathscr{M},\mu)$，$(Y,\mathscr{N},\nu)$ 是任意测度空间，

1) 如果 $f: X \to \boldsymbol{R}$ 是 $\mathscr{M}$ — 可测的，$g: Y \to \boldsymbol{R}$ 是 $\mathscr{N}$- 可测的，$h(x, y) = f(x)g(y)$，那么 h 是 $\mathscr{M} \times \mathscr{N}$ 可测的，

2) 如果 f 是 μ- 可积的，g 是 ν- 可积的，那么 h 是 $\mu \times \nu$ 可积的，并且 $\int h \mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int f \mathrm{d}\mu \int g \mathrm{d}\nu$。

第六节　历史注记

实变函数论起源于19世纪后半叶数学分析的奠基工作。20世纪初它的一些基本概念如勒贝格测度、可测函数、积分等等已经建立，但是它们和古典分析基本概念之间的关系还有待探讨。在这方面前苏联数学家鲁金(Лузин)作出了杰出的贡献。

鲁金1883年出生于俄国托木斯克一个高级商务职员家庭，中学毕业后进入莫斯科大学物理数学系数学专业学习。进校不久，教授们的精彩讲课激起了鲁金的创造欲望。他"突然发现数学不是背诵业已形成的真理和无数个久已给出答案的问题的解答体系，而是主动创造的辽阔领域，……"。在他面前"数学已不再是完备的科学，而是具有充满诱人秘密的前景的创造性的科学"。他积极参加以茹科夫斯基(Жуковский)为首的大学生数学小组活动，并在叶戈洛夫(Егоров)教授指导下研究数学，最终被一个新的研究领域——实变函数论吸引住了。

1906年鲁金大学毕业，留校培养。1910年在通过硕士资格考试后被派往哥廷根和巴黎进修。在巴黎大学和法兰西学院，他听过波雷耳、庞加莱、阿达玛、达布(Darboux，1842 — 1917)等著名数学家的讲课。这期间他发表了近十篇论文。1914年春回到莫斯科大学任副教授，1916年获得博士学位，次年成为莫斯科大学教授。

1912年鲁金从深入刻画可测函数的基本性质入手，证明了任意可测函数都能在任意小测度的集上改变其值，使之成为连续函数，这就是著名的鲁金C—性质。它揭示了度量性函数论的中心概念—可测函数与古典分析的基本概念—连续函数的关系，成为研究可测函数的有力工具。凭藉它，鲁金解决了实变函数论积分学的基本问题，即在最一般的函数定义下推广微积分基本定理。他证明了，对在任何除去一个零测度集外处处有限的可测函数，存在几乎处处以给定函数为其导数的原函数。同时他找到了构造这种原函数的方法。

鲁金还在三角级数和幂级数理论、描述性函数论方面做了许多杰出的工作。他的研究方法的特点是问题提法的一般性，证明的清晰性与几何性。鲁金工作的重点是实变函数论，但他也精通经典方法，对数学史也有研究。他还十分关心教学工作，抽出很多时间来编写和修改教材。他善于讲课，有吸引别人来从事科学研究的特殊才能。他的课程和讨论班是莫斯科数学学派的摇篮，他的学生把他的思想和方法应用于其他数学领域，引起了一系列深刻的变革，对苏联和世界现代数学的发展产生了巨大影响。

鲁金于1923年当选苏联科学院通讯院士，两年后成为正式院士，1950年因心脏病发作逝世。

第四章　微　分

本章的中心是讨论牛顿一莱布尼兹(Newton-Leibniz)公式成立的充要条件，这不可避免地要讨论变上限定积分的导数，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right),$$

这里$f(t)$是勒贝格可积函数。当$f\geqslant 0$时，$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是单调增函数，当f是一般可积函数时，

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}\mu=\int_a^x f^+(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f^-(t)\mathrm{d}t$$

是两个单调函数的差。因此，以单调函数和有界变差函数作为本章的开始是很自然的。

第一节　单调函数和有界变差函数

首先声明本节涉及的测度均指勒贝格测度。

设f是区间$[a,b]$上的单调函数，那么我们可以断言f在$[a,b]$上黎曼可积，因此也是可测的。事实上，由例Ⅰ.3.1可知f的不连续点集至多是可列集，因而有零测度。所以f在$[a,b]$上几乎处处连续，于是由定理Ⅱ.4.7可知f在$[a,b]$上黎曼可积。

下面我们着重讨论f的可微性。

定义1　设f是$[a,b]$上的有限函数，那么下面4个极限分别称为f在x点的右方上导数、右方下导数、左方上导数、左方下导数：

$$\left.\begin{aligned} D^+ f(x) &= \limsup_{h\to 0\ \ h>0} \\ D_+ f(x) &= \liminf_{h\to 0\ \ h>0} \\ D^- f(x) &= \limsup_{h\to 0\ \ h<0} \\ D_- f(x) &= \liminf_{h\to 0\ \ h<0} \end{aligned}\right\} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}。$$

由定义可知 $D_+ f(x) \leqslant D^+ f(x), D_- f(x) \leqslant D^- f(x)$。

如果上述 4 个数相等，那么称 f 在 x 点具有导数，其公共值记为 $f'(x)$，称为 f 在 x 点的导数。如果在 x 点 $f'(x)$ 存在且有限，那么称 f 在 x 点可微分。

我们将证明

定理 1 单调函数几乎处处有有限导数。

注 1 我们先指出上述结果不能再改善。事实上，我们有结论：设 E 是 $[a,b]$ 中的零测度集，那么一定存在一个连续单调增函数 $\sigma(x)$，使 $\sigma(x)=\infty$，对 $x\in E$。

证明：对任一 $n\in N$，有开集 $G_n \supset E$，使 $m(G_n) < 1/2^n$。令

$$\varphi_n(x) = m(G_n \cap [a,x]),$$

则 $\varphi_n(x) \geqslant 0$，单调增，连续（连续性来自 $m([x,x+\Delta x]) = \Delta x \to 0$），并且 $\varphi_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n}$。令 $\sigma(x) = \Sigma_1^\infty \varphi_n(x)$，易见该级数在 $[a,b]$ 上一致收敛，因此 $\sigma(x)$ 也是连续非负单调增函数。

任取 $x_0 \in E$，当 $|h|$ 充分小时，$[x_0-|h|, x_0+|h|] \subset G_n$。为简单计，不妨设 $h>0$，则

$$\begin{aligned} \varphi_n(x_0+h) &= m(G_n \cap [a, x_0+h]) \\ &= m(G_n \cap [a,x_0]) + m(G_n \cap (x_0, x_0+h]) \\ &= \varphi_n(x_0) + h, \end{aligned}$$

因此

$$\frac{\varphi_n(x_0+h)-\varphi_n(x_0)}{h} = 1。$$

对任一 $N\in N$，有 h 充分小，使 $[x_0, x_0+h] \subset \bigcap_1^N G_n$。因此

$$\frac{\sigma(x_0+h)-\sigma(x_0)}{h} \geqslant \Sigma_{n=1}^{N} \frac{\varphi_n(x_0+h)-\varphi_n(x_0)}{h} \geqslant N。$$

令 $h \to 0$ 得 $D^+\sigma(x_0) \geqslant N$。令 $N \to \infty$ 得 $D^+\sigma(x_0) = \infty$。类似地可证，$D^-\sigma(x_0) = D_-\sigma(x_0) = +\infty$，所以 $\sigma'(x_0) = \infty$。

为了证明定理1需要引入

定义2 设 $E \subset \mathbf{R}$，一个闭区间簇 Q 称为 E 的维他利(Vitali)覆盖，如果对任一 $x \in E$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $I \in Q$，使 $x \in I$，$0 < |I| < \varepsilon$(用 $|I|$ 表示 $m(I)$)。

定理2(维他利(Vitali)覆盖定理) 设 $E \subset \mathbf{R}$，$m^*(E) < \infty$，Q 是 E 的维他利覆盖，那么对任一 $\varepsilon > 0$，存在 Q 中有限个不相交区间 $I_1,\cdots,I_n$ 使

$$m^*(E - \bigcup_1^n I_i) < \varepsilon。$$

(与有限开覆盖定理相比较，维他利覆盖定理提供了一个近似有限覆盖。)

证明：因为 $m^*(E) < \infty$，存在一个开集 $G \supset E$，使 $m(G) < \infty$。不失一般性可以假设 Q 中的闭区间都含在 G 内。事实上，如果 $I \in Q$ 不含在 G 内，那么我们可以用下面的方法构造一族新的闭区间，使它们含在 G 中，用它们取代 I。对任一 $x \in I \cap E \subset G$，有 $\delta_x > 0$ 使 $(x - \delta_x, x + \delta_x) \subset G$，记 $I_x = \left[x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2}\right]$，那么我们可以用闭区间簇 $\{I_x : x \in I \cap E\}$ 取代 I。任取 $I_1 \in Q$，然后按下面的办法归纳地选取 $I_1, I_2, \cdots$。假设 $I_1,\cdots,I_k$ 已经取定，并且 $E - \bigcup_1^k I_i \neq \varnothing$，那么令

$$Q_k = \{I \in Q ; I \cap I_i = \varnothing, 对\ i = 1,\cdots k\},$$

$$s_k = \sup\{|I| ; I \in Q_k\}。$$

显然 $0 < s_k < m(G) < \infty$，并且可以取 $I_{k+1} \in Q_k$ 使 $|I_{k+1}| > \frac{1}{2}s_k$。如果对某个 n 有 $E \subset \bigcup_1^n I_i$，那么定理得证，否则得到一个两两不交闭区间的序列 $\{I_i\} \subset Q$。

我们将证明 $m^*(E - \bigcup_1^\infty I_i) = 0$。假设不然，那么 $m^*(E - \bigcup_1^\infty I_i) = \delta > 0$。因为 $\Sigma|I_i| = |\Sigma I_i| \leqslant m(G) < \infty$，存在 N 使

$\Sigma_{N+1}^{\infty}|I_i|<\delta/5$。令 $F=E-\bigcup_1^N I_i$,因为 $\bigcup_1^N I_i$ 是闭集,所以对 $x\in F$ 有 $I\in Q$,使 $x\in I, I\cap(\bigcup_1^N I_i)=\varnothing$。这样 $I\in Q_N$,从而 $|I|\leqslant s_N<\alpha|I_{N+1}|$。因为 $|I_i|\to 0$,所以存在某个 $n>N$ 使 $s_n<|I|$,从而 $I\overline{\in} Q_n$。因此存在某个 i,使 $N<i\leqslant n, I\cap I_i\neq\varnothing$。令

$$k=\min\{i:I_i\cap I\neq\varnothing\},$$

那么 $I\cap(\bigcup_1^{k-1}I_i)=\varnothing, I\cap I_k\neq\varnothing$,因此 $|I|\leqslant s_{k-1}<2|I_k|$。令 H_k 是与 I_k 同心,长为 $5|I_k|$ 的区间,那么 $x\in H_k$(见图 1),从而 $F\subset\bigcup_{N+1}^{\infty}H_i$。这样我们有

$$\delta=m^*(E-\bigcup_1^{\infty}I_i)\leqslant m^*(F)\leqslant\Sigma_{N+1}^{\infty}5|I_i|<\delta,$$

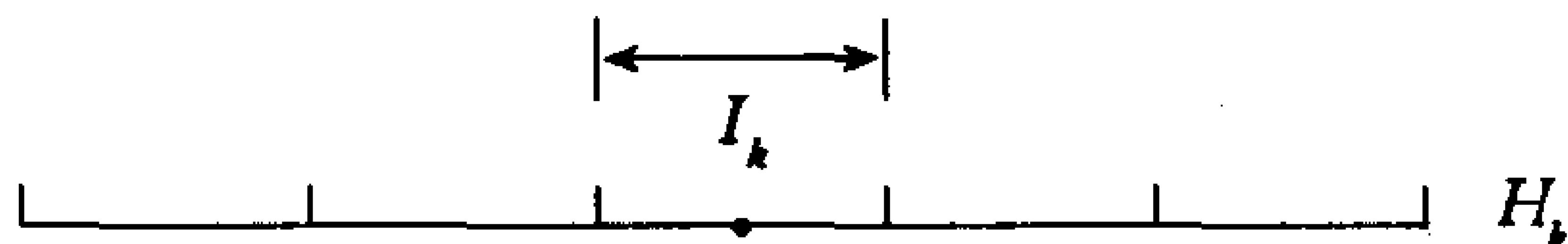


图1

得出矛盾。再由 $E-\bigcup_1^n I_i\subset(E-\bigcup_1^{\infty}I_i)\cup(\bigcup_{n+1}^{\infty}I_i)$ 得

$$m^*(E-\bigcup_1^n I_i)\leqslant\Sigma_{n+1}^{\infty}|I_i|\to 0。$$

定理 1 的证明:不失一般性可以假设 f 是 $[a,b]$ 上的递增函数。令

$$E=\{x\in[a,b]:D_-f(x)<D^+f(x)\},$$

我们要证明 $m^*(E)=0$。易见 E 是

$$E_{uv}=\{x\in[a,b]:D_-f(x)<v<u<D^+f(x)\}$$

的并,其中 u、v 取遍所有的有理数。令 $t=m^*(E_{uv})(<b-a)$,那么存在开集 $G\supset E_{uv}$ 使 $m(G)<t+\varepsilon$。对任一 $x\in E_{uv}$,存在非负数列 $\{h=h_{xn}\}_1^{\infty}$ 使 $h\to 0,[x-h,x]\subset G, f(x)-f(x-h)<vh$。这样 $\{[x-h,x]:x\in E_{uv}, h=h_{xn}\}$ 是 E_{uv} 的维他利覆盖。由维他利覆盖定理,存在有限个区间 $J_i=[x_i-h_i,x_i](1\leqslant i\leqslant p)$,使 $m^*(E_{uv}-\bigcup_1^p J_i)<\varepsilon$。这时有

$$\Sigma_1^p[f(x_i)-f(x_i-h_i)]<\sigma\Sigma_1^p h_i\leqslant vm(G)<v(t+\varepsilon)。\tag{2}$$

令 $F=E_{uv}\cap(\bigcup_1^p(x_i-h_i,x_i))$,那么 $m(F)>t-\varepsilon$。对 $y\in F$,有小

区间 $K=[y,y+k]$ 含在某个 J_i 中，使 $f(y+k)-f(y)>uk$。这些区间的全体组成 F 的一个维他利覆盖，所以存在有限个区间 $K_j=[y_j,y_j+k_j]$，$j=1,\cdots,q$，使 $m^*(F-\bigcup_1^q K_j)<\varepsilon$。令 $H=F\cap(\bigcup_1^q K_j)$，那么 $m^*(H)>t-2\varepsilon$。因为每一个 K_j 都含在某个 J_i 中，所以

$$\Sigma_1^p[f(x_i)-f(x_i-h_i)]\geqslant\Sigma_1^q[f(y_j+k_j)-f(g_j)]$$
$$>u\Sigma_1^q k_j>u(t-2\varepsilon)。\qquad(3)$$

由(2)和(3)得 $v(t+\varepsilon)>u(t-2\varepsilon)$。令 $\varepsilon\to 0$ 得 $v>u$，矛盾。

类似地可以证明 $m^*\{x\in[a,b]:D^-f(x)<D^+f(x)\}=0$ 等等，因此4个导数都相等。最后证明 $m^*(E(D^+f(x)=\infty)=0$。令 $E_n=E(D^+f>n)$，则 $E(D^+f=\infty)=\bigcap_1^\infty E_n$。因为 $\{E_n\}$ 是单调降的，所以 $m^*(E(D^+f=\infty))\leqslant\lim m^*(E_n)$。对 $x\in E_n$，有 $h=h_{x_n}\to 0$，使 $f(x+h)-f(x)>nh$。易见 $\{[x,x+h]:x\in E_n,h=h_{x_n}\}$ 是 E_n 的维他利覆盖。由维他利定理有 k_n 使 $m^*(E_n-\bigcup_1^{k_n}[x_i,x_i+h_i])<\frac{1}{n}$，因此 $m^*(E_n)<\Sigma_1^{k_n}h_i+\frac{1}{n}$。另一方面

$$f(b)-f(a)\geqslant\Sigma_1^{k_n}[f(x_i+h_i)-f(x_i)]>n\Sigma_1^{k_n}h_i,$$

所以

$$m^*(E_n)<\frac{1}{n}[f(b)-f(a)+1]\to 0。$$

因此 $m^*(E(D^+f=\infty))=0$，即 f 几乎处处有有限导数。

定理3 设 f 是 $[a,b]$ 上单调增函数，那么 $f'(x)$ 一定是勒贝格可积函数，而且

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)-f(a)。\qquad(4)$$

证明：在 $[b,b+1]$ 上规定 $f(t)=f(b)$。对任何 $n\in N$，作函数

$$\varphi_n(t)=n[f(t+\frac{1}{n})-f(t)],$$

它是非负可测可积函数，几乎处处收敛于 $f'(t)$，并且

$$\lim_{h\to\infty}\int_a^b\varphi_n(t)\mathrm{d}t=\lim_{h\to\infty}n\left[\int_a^b(f(t+\frac{1}{n})-f(t))\mathrm{d}t\right]$$

$$= \lim_{h\to\infty} n\left[\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(t)\mathrm{d}t\right]$$
$$= f(b) - f(a+0)$$
$$\leqslant f(b) - f(a) < \infty。$$

再由法都定理得到

$$\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \lim\varphi_n(t)\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \lim_{h\to\infty}\int_a^b \varphi_n(t)\mathrm{d}t$$
$$\leqslant f(b) - f(a)。$$

注 2　一般来说，(4) 不能成为等式，例如直线上的海维赛特(Heaviside) 函数 $H(x)$($H(x)=0$ 对 $x\leqslant 0$，$H(x)=1$ 对 $x>0$) 有

$$\int_{-1}^1 H'(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 o\mathrm{d}x = 0 < 1 = H(1) - H(-1)。$$

甚至当 f 是连续的单调增加函数时，(4) 也可能不成立(请参阅[7]，第 8 章例 15 和例 30)。

下面我们讨论有界变差函数。

定义 3　设 f 是$[a,b]$上的有限函数，对$[a,b]$的任意一个分划 D：$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，作和式

$$V_f(D) = \Sigma_1^n |f(x_i) - f(x_i - 1)|,$$

称为 f 关于分划 D 的变差。令

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sup_D V_f(D),$$

称为 f 在$[a,b]$上的全变差。如果 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty$，那么称 f 为有界变差函数。$[a,b]$ 上有界变差函数的全体记为 $V[a,b]$。当 x 在$[a,b]$ 上变化时，称 $\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$ 为 f 在$[a,b]$ 上的全变差函数。

注 3　由定义可知，如果 $f\in V[a,b]$，那么

1) f 在$[a,b]$ 上有界。事实上

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(a)| + |f(a)|$$

$$\leqslant |f(b)-f(x)|+|f(x)-f(a)| + |f(a)|$$
$$\leqslant \mathop{V}_a^b(f)+f(a)。$$

2) 如果 $\mathop{V}_a^b(f)=0$，那么 f 在 $[a,b]$ 上是常数。因为如果有 $x_0\in[a,b]$，$|f(x_0)-f(a)|\neq 0$，那么 $\mathop{V}_a^b(f)\geqslant |f(x_0)-f(a)|\neq 0$。

3) 如果 $[c,d]\subset[a,b]$，那么 f 限制在 $[c,d]$ 上时，$f\in V[c,d]$。

4) 对任意常数 c 有 $\mathop{V}_a^b(cf)=|c|\mathop{V}_a^b(f)$。

例 1 区间 $[a,b]$ 上的有限单调函数是有界变差函数，$\mathop{V}_a^b(f)=|f(b)-f(a)|$。

例 2 闭区间上的有界函数也可能不是有界变差函数。例如 $[0,\frac{2}{\pi}]$ 上的函数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0, \\ 0 & x=0, \end{cases}$$

就不是有界变差函数。事实上给分划 $D:0=x_0<x_1<\cdots<x_{n+1}=\frac{2}{\pi}$，其中

$$x_1=\frac{1}{\pi}\frac{1}{n+\frac{1}{2}},x_2=\frac{1}{\pi}\frac{1}{n-1+\frac{1}{2}},\cdots,x_n=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\frac{1}{2}},$$

那么 $f(x_i)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1-i+\frac{1}{2}}(-1)^{n+1-i}$，

$$V_f(D)=$$
$$\frac{1}{\pi}\left[\left|\frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}}-0\right|+\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n-\frac{1}{2}}-\frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}}\right|+\cdots+\left|\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right|\right)$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{(2n+1)}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+1\right]$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right]$$
$\to \infty$

定理 4 有界变差函数具有下面的性质：

1) 如果 $f、g \in V[a,b]$，那么对 $\alpha、\beta \in R$，有 $\alpha f+\beta g、fg \in V[a,b]$，并且

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(\alpha f+\beta g) \leqslant |\alpha|\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+|\beta|\overset{b}{\underset{a}{V}}(g), \tag{5}$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(fg) \leqslant \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)+\sup_{x\in[a,b]}|g(x)|\overset{b}{\underset{a}{V}}(f); \tag{6}$$

2) 如果 $f \in V[a,b]$，$a<c<b$，那么

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)。 \tag{7}$$

证明：1) 由注 3.4) 不妨设 $\alpha=\beta=1$。对任意的分划 $D: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 有

$$\begin{aligned}V_{f+g}(D) &= \Sigma_1^n|(f+g)(x_i)-(f+g)(x_{i-1})|\\ &\leqslant \Sigma_1^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\Sigma_1^n|g(x_i)-g(x_{i-1})|\\ &\leqslant V_f(D)+V_g(D)\\ &\leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)。\end{aligned}$$

左边对 D 取上确界即得(5)。

因为

$$\begin{aligned}&|f(x_i)g(x_i)-f(x_{i-1})g(x_{i-1})|\\ &\quad\leqslant |f(x_i)||g(x_i)-g(x_{i-1})|\\ &\qquad+|g(x_{i-1})||f(x_i)-f(x_{i-1})|\end{aligned}$$

易知对任意的分划 D 有

$$V_{fg}(D) \leqslant \sup|f(x)|V_g(D)+\sup|g(x)|V_f(D)$$

对 D 取上确界即得(6)。

2) 设 D_1 是 $[a,c]$ 的一个分划，D_2 是 $[c,d]$ 的一个分划，D 是由 $D_1、D_2$ 的分点及点 c 组成的分划，那么 $V_f(D_1)+V_f(D_2)=V_f(D)\leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$，从而 $\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)\leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$。

另一方面，对 $\varepsilon > 0$ 有分划 $D: a = y_0 < y_1 < \cdots < y_k = b$，使 $V_f(D) > \overset{b}{\underset{c}{V}}(f) - \varepsilon$。假设 $y_{i-1} < c \leqslant y_i$，记 $D_1: a = y_0 < y_1 < \cdots < y_{i-1} < c$，$D_2 = c \leqslant y_i < \cdots < y_k = b$，那么

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) - \varepsilon \leqslant V_f(D) \leqslant V_f(D_1) + V_f(D_2) \leqslant \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$$

令 $\varepsilon \to 0$ 即得(7)。

推论 1　设 $f \in V[a,b]$，那么 $\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$ 是 x 的增函数。

证明：因为 $\overset{x_2}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f) \geqslant 0$ 对 $x_1 < x_2$，因此 $\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$ 是 x 的增函数。

下面我们考察有界变差函数的分解。

引理 1　设 $f \in V[a,b]$，那么 $\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) + f$，$\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) - f$ 都是 x 的增函数。

证明：设 $x < y$，由定理 4.2）有

$$\begin{aligned}\overset{y}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{x}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{y}{\underset{x}{V}}(f) &\geqslant |f(y) - f(x)| \\ &\geqslant f(x) - f(y),\end{aligned}$$

因此

$$\overset{y}{\underset{a}{V}}(f) + f(y) \geqslant \overset{x}{\underset{a}{V}}(f) + f(x)。$$

类似地可证 $\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) - f(x)$ 递增。

定理 5(**若当**(Jordan) **分解**)　设 f 定义在 $[a,b]$ 上，那么 $f \in V[a,b]$ 当且仅当 $f = \varphi - \psi$，这里 φ、ψ 是递增函数。

证明：充分性得自例 1 和定理 4.1)。必要性得自引理 1 和等式

$$f(x) = \frac{1}{\alpha}\left[\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) + f(x)\right] - \frac{1}{\alpha}\left[\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) - f(x)\right]。$$

推论 2　有界变差函数的不连续点是第一类间断点（即函数在该点的左、右极限都存在，但未必与该点的函数值相等）；不连续点全体至多是一可列集；有界变差函数几乎处处存在有限导数，而且导函

数是勒贝格可积的。

显然有界变差函数写成二个单调函数的差的分解不是唯一的，为了使这种分解确定起见，我们引入

定义4 设 $f \in V[a,b]$，定义

$$p(x) = \frac{1}{\alpha}[\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) + f(x) - f(a)],$$

$$n(x) = \frac{1}{\alpha}[\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) - f(x) + f(a)],$$

分别称为 f 的正变差函数和负变差函数，称

$$f(x) - f(a) = p(x) - n(x),$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = p(x) + n(x)$$

为 f 的正规分解。

下面我们考察 $\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$ 与 $f(x)$ 的连续性的关系。

引理2 设 $f \in V[a,b]$，那么 f 与 $\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$ 有相同的(左)右连续点。

证明：设 $\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$ 在 x_0 点右连续，那么由

$$|f(x_0+\delta) - f(x_0)| \leqslant \overset{x_0+\delta}{\underset{x_0}{V}}(f) = \overset{x_0+\delta}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{x_0}{\underset{a}{V}}(f)$$

可知 f 在 x_0 点右连续。

设 f 在 ξ 点右连续，那么对 $\varepsilon > 0$，有 $\delta > 0$ 使当 $x \in (\xi, \xi+\delta)$ 时有 $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon/2$。任取分划 $\xi = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \xi + \delta$ 使

$$\Sigma_1^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| > \overset{\xi+\delta}{\underset{\xi}{V}}(f) - \varepsilon/2$$

因为

$$\Sigma_2^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \overset{\xi+\delta}{\underset{x_1}{V}}(f),$$

所以

$$\overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{\xi}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{x_1}{\underset{\xi}{V}}(f) = \overset{\xi+\delta}{\underset{\xi}{V}}(f) - \overset{\xi+\delta}{\underset{x_1}{V}}(f)$$

$$< \Sigma_1^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \varepsilon/2 - \Sigma_2^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

$$= |f(x_1) - f(\xi)| + \varepsilon/2 < \varepsilon。$$

当 $x \in (\xi, x_1)$ 时，更有 $\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{\xi}{\underset{a}{V}}(f) < \varepsilon$，所以 $\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$ 在 ξ 点右连续。

对左连续情形可类似地处理。

定理6(**分部积分**)　设 f、$g \in V[a,b]$，右连续，并且其中之一是连续的，那么

$$\int_{(a,b]} f\mathrm{d}g + \int_{[a,b]} g\mathrm{d}f = f(b)g(b) - f(a)g(a)。\qquad (8)$$

证明：不失一般性可设 f、g 是右连续递增函数，并且 g 是连续函数。用 μ_f，μ_g 表示由 f、g 定义的勒贝格 — 斯蒂阶测度。令 $\Delta = \{(x,$

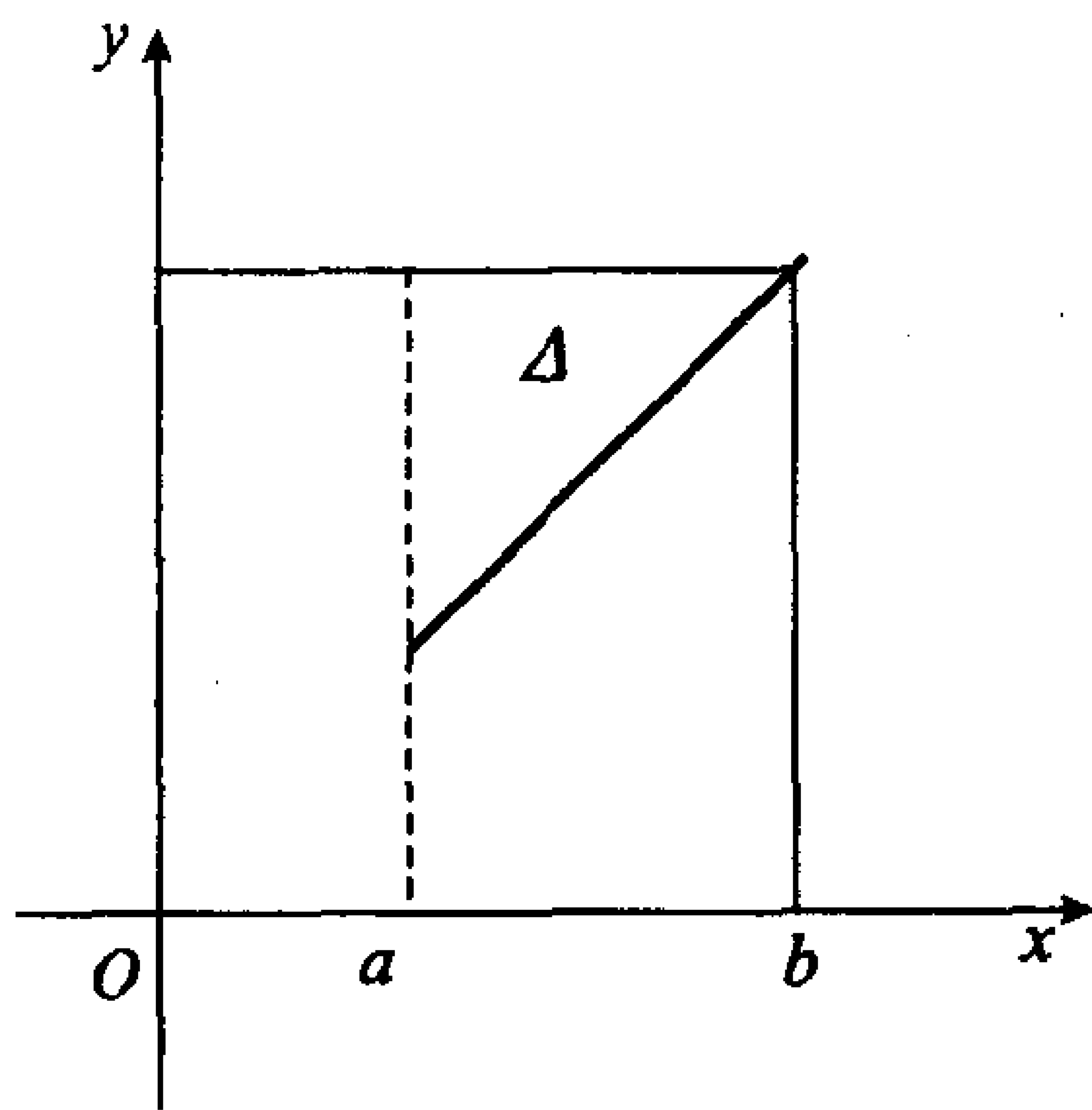


图 2

$y): a < x \leqslant y \leqslant b\}$(见图 2)，由富比尼定理有

$$\mu_f \times \mu_g(\Delta) = \int_{(a,b]}\int_{[a,g]} \mathrm{d}f(x)\mathrm{d}g(y)$$

$$= \int_{(a,b]} [f(y) - f(a)]\mathrm{d}g(y)$$

$$= \int_{(a,b]} f\mathrm{d}g - f(a)[g(b) - g(a)] \tag{9}$$

另一方面，因为 $g(x) = g(x^-)$（g 的连续性用于此），有

$$\mu_f \times \mu_g(\Delta) = \int_{(a,b]}\int_{[x,b]} \mathrm{d}g(y)\mathrm{d}f(x)$$

$$= \int_{(a,b]} [g(b) - g(x)]\mathrm{d}f(x)$$

$$= g(b)[f(b) - f(a)] - \int_{(a,b]} g\mathrm{d}f \tag{10}$$

由(9)、(10) 即得(8)。

习　　题

A　类

1. $[a,b]$ 上的任何两个单调函数，如果在一稠密集上相等，那么它们有相同的连续点，并且在不连续点的跃度一致。

2. 单调函数的势是 $\aleph$。

3. 设

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 + x\sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0, \end{cases}$$

由 φ 作函数 f：当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x) = \sqrt{x}\varphi(x)$；当 $x < 0$ 时，$f(x) = -\sqrt{x}\varphi(x)$，问 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的导数是否存在？

4. 设 α 为一实数，函数

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x} & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

在 α 为何值时是$[0,1]$上的有界变差函数？

5. 当$[a,b]$上的函数 f 满足 $|f(x') - f(x'')| \leqslant k|x' - x''|^\alpha$，($\alpha > 0$，$k$ 是常数）时，称 f 满足 α 次荷尔德(Hfl lder) 条件。证明：当 $\alpha > 1$ 时，f 恒为常数。试作一个不满足任何次荷尔德(Hfl lder) 条件的有

界变差函数。又设 $\alpha < 1$ 为已知，试作一函数满足 α 次荷尔德(Hölder)条件，但不是有界变差的。

6. 证明函数 f 在 $[a,b]$ 上满足李普希茨(Lipschitz)条件(即存在常数 M，当 $x,x' \in [a,b]$ 时，$|f(x)-f(x')| \leqslant M|x-x'|$)的充要条件是对任何 $\varepsilon > 0$，必存在 $\delta > 0$，使对任何有限个区间 (a_ν,b_ν)，$\nu = 1,2,\cdots,n$，只要 $\Sigma_1^n(b_\nu - a_\nu) < \delta$，就有 $\Sigma_1^n|f(b_\nu)-f(a_\nu)| < \varepsilon$。

7. 设 f 是 $[a,b]$ 上的连续有界变差函数，证明对任何 $\varepsilon > 0$，必有 $\delta > 0$，当分点组 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 的 $\max\limits_i(x_i - x_{i-1}) < \delta$ 时，总有 $V_f(x_0,\cdots,x_n) < \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) - \varepsilon$。

8. 设 μ_g 是 $\boldsymbol{R}$ 上的勒贝格—斯蒂阶测度，$I = [a,b]$，证明

$$\int_I f\mathrm{d}\mu_g \leqslant \sup_{t\in I}|f(t)|\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)。$$

9. 定义区间 $[0,1]$ 上的函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1, \\ \Sigma_1^n 2^{-i} & x \in [1-2^{-n+1}, 1-2^{-n}), \end{cases}$$

问 f 在 $x = 1$ 是否连续，是否可微？

B 类

1. 设 f 是 $[a,b]$ 上单调函数，令 $g(x) = f(x^+)$，证明 g 与 f 有相同的可微分点。

2. 设 $E \subset \boldsymbol{R}$，$m(E) = 0$，试作一单调增加函数 f，使当 $x \in E$ 时，$f'(x) = \infty$。

3. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，如果存在 M，使对任一 $x \in [a,b]$，有 $|D_+ f(x)| < M$，那么 f 满足李普希茨(Lipschitz)条件。

4. 设 $f \in V[a,b]$，那么对于勒贝格测度有 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) = |f'(x)|$。

5. 设 f 在 $[a,b]$ 上单调，那么 f 必将 $[a,b]$ 上波雷耳集映照成 $\boldsymbol{R}$ 上的波雷耳集；如果 $f'(x)$ 处处存在有限，那么 f 必将 $[a,b]$ 上的勒贝格零测集映成 $\boldsymbol{R}$ 上的零测集。

6. 设 f 是 $[a,b]$ 上有限函数，证明 f 在 $[a,b]$ 上的连续点全体是波雷耳集。

7. 设 f 在 $[a,b]$ 上处处有有限导数，证明 f' 不能在 (a,b) 上有第一类不连续点。

8. 作一个 (a,b) 上的连续函数 f，要求 f 在 (a,b) 上处处有有限导数，并且 f' 在 (a,b) 上不连续点全体具有正的勒贝格测度。

9. 设 $E\subset[a,b]$ 是勒贝格可测集，证明 E 中几乎所有的点都是 E 的全密点，即 $\lim\limits_{(\alpha,\beta)\to x}\dfrac{m((\alpha,\beta)\cap E)}{\beta-\alpha}\doteq 1\quad\forall\, x\in E$。

第二节　全连续函数

我们已经知道，如果 $f\in V[a,b]$，那么 $f'(x)$ 几乎处处存在有限并且勒贝格可积，

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)-f(a)。\tag{1}$$

本节我们将讨论在什么条件下(1) 中的等号成立。假设对 $x\in[a,b]$ 有

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,$$

那么由积分的全连续性，对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，当 $e\subset[a,b]$，$m(e)<\delta$ 时有 $\int_e f'(t)\mathrm{d}t<\varepsilon$。特别地，如果 $\delta=\bigcup_1^n(a_i,b_i)$，$(a_i,b_i)$ 两两不交，那么由 $\Sigma_1^n(b_i-a_i)<\delta$ 可得 $\Sigma_1^n|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$。于是我们引入下面的

定义 1　函数 $f:[a,b]\to\boldsymbol{R}$ 称为全连续的，如果对 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\{(a_i,b_i)\}_1^n$ 是 $[a,b]$ 中有限个两两不交区间，并且 $\Sigma_1^n(b_i-a_i)<\delta$ 时有

$$\Sigma_1^n|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon。\tag{2}$$

用 $AC[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上全连续函数的全体。显然两个全连续

函数的线性组合、乘积仍是全连续函数。下面我们研究 $AC[a,b]$ 与 $V[a,b]$ 的关系。

定理 1　如果 $f \in AC[a,b]$，那么 $f \in V[a,b]$。

证明：令 $\varepsilon = 1$，那么有 $\delta > 0$，使(2) 成立。设 $D: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是一个任意的分划。再取一个分划 $D_1: a = y_0 < y_1 < \cdots < y_N = b$ 使 $|y_i - y_{i-1}| < \delta$。用 $D_2: a = z_0 < z_1 < \cdots < z_m = b$ 表示以所有的 x_i、y_j 为分点的分划，那么

$$V_f(D) \leqslant V_f(D_2) \leqslant \Sigma_1^N V_f(y_{i-1},\cdots,y_i) \leqslant N,$$

其中 $V_f(y_{i-1},\cdots,y_i)$ 表示分划 D_2 在区间 $[y_{i-1},y_i]$ 上的限制对应的变差。对 D 取上确界得 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \leqslant N$，所以 $f \in V[a,b]$。

定理 2　设 f 在 $[a,b]$ 上勒贝格可积，那么

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \in AC[a,b]。$$

证明：实际上在本节的第一段已经给出，这里不再重复。

为了讨论变上限(勒贝格) 定积分的导数我们需要下面的命题 1 和定理 3。

命题 1　设 f 在 $[a-1,b+1]$ 上勒贝格可积，对 $a \leqslant x \leqslant b$，$|h| < 1$，令

$$F_h(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t,$$

那么当 $h \to 0$ 时 $\{F_h\}$ 在 $[a,b]$ 上平均收敛于 f。

证明：因为

$$F_h(x) - f(x) = h^{-1}\int_x^{x+h}[f(t) - f(x)]\mathrm{d}t$$
$$= h^{-1}\int_0^h [f(x+v) - f(x)]\mathrm{d}v,$$

所以

$$\int_a^b |F_n(a) - f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |h|^{-1}\int_0^{|h|}|f(x+v) - f(x)|\mathrm{d}v\mathrm{d}x$$

(由富比尼定理) $\leqslant \int_0^{|h|}|h|^{-1}\int_a^b |f(x+v) - f(x)|\mathrm{d}x\mathrm{d}v$。

为应用平均连续性定理 Ⅱ.4.5，把 $f(x)$ 的定义扩大到整个实轴上，令 $f(t)=0$，对 $t\overline{\in}[a-1,b+1]$。那么对 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，当 $|\sigma|<\delta$ 时有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+\sigma)-f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon。$$

这样，当 $|h|<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}\int_a^b|F_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x &\leqslant \int_0^{|h|}|h|^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}|(f(x+v)\\ &\qquad -f(x)|\mathrm{d}x\mathrm{d}v\\ &\leqslant \varepsilon\int_0^{|h|}|h|^{-1}\mathrm{d}v=\varepsilon。\end{aligned}$$

定理 3　如果函数序列 $\{F_n\}$ 平均收敛于 F，又几乎处处收敛于 G，那么 $F\dot{=}G$。

证明：由法都定理有

$$\begin{aligned}\int|F(x)-G(x)|\mathrm{d}x &= \int\lim|F(x)-F_n(x)|\mathrm{d}x\\ &\leqslant \lim\int|F(x)-F_n(x)|\mathrm{d}x=0,\end{aligned}$$

因此 $F(x)\dot{=}G(x)$。

定理 4　如果 f 在 $[a,b]$ 上勒贝格可积，

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t，对\ x\in(a,b],$$

那么 $F'(x)$ 几乎处处存在，并且等于 $f(x)$。

证明：由定理 2，$F\in AC[a,b]$，因此 $F\in V[a,b]$，从而 $f'(x)$ 几乎处处存在，并且等于 $\lim\limits_{n\to\infty}F_{\frac{1}{n}}(x)$。由命题 1，$F_{\frac{1}{n}}$ 平均收敛于 f，因此由定理 3 有 $F'(x)\dot{=}f(x)$。

下面一个定理揭示了全连续函数的一个重要性质，也为推导牛顿 — 莱不尼兹公式作准备。

定理 5　如果 $f\in AC[a,b]$，$f'\dot{=}0$，那么 f 在 $(a,b]$ 上恒等于常数。

证明：我们只要证 $f(b)=f(a)$。把区间 $[a,b]$ 分成两部分，令 $E_0=\{x\in[a,b]:f'(x)=0\}$，$E_1=[a,b]-E$，那么 $m(E_1)=0$。设 ε，δ 是定义 1 中的两个数，易见存在开集 $O\supset E_1$，使 $m(O)<\delta$。令 $F=[a,b]-O$，那么 $F\subset E_0$，所以对 $x\in F$，存在正数 h，当 $x'\in(x-h,x+h)$ 时

$$|f(x')-f(x)|<\varepsilon|x'-x|。\tag{3}$$

设 $\{(a_n,b_n)\}_{n=1}^{m}(m\leqslant\infty)$ 是 O 的构成区间，那么 $\{(a_n,b_n)\}_{n=1}^{m}\cup\{(x-h,x+h),x\in F\}$ 成为 $[a,b]$ 的一个开覆盖。因为 $[a,b]$ 是有界闭集，存在一个有限开覆盖，记为

$(a_1,b_1),\cdots,(a_l,b_l)$,

$(y_1-h_1,y_1+h_1),\cdots,(y_n-h_n,y_n+h_n)$。

在集合 $\{a_i,b_i,i=1,2,\cdots,l;y_j,j=1,2,\cdots,n\}$ 中添加适当分点（例如 a、b 以及 y_i-h_i、y_i+h_i），把这些分点组成的分划记为 $D:a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$。不难看到这个分划的小区间有三种情形

1) (x_{i-1},x_i) 含于某个 (a_j,b_j) 中，

2) $x_{i-1}=y_j$ 且 $(x_{i-1},x_i)\subset(y_i,y_j+b_j)$，

3) $x_i=y_j$ 且 $(x_{i-1},x_i)\subset(y_j-b_j,y_j)$。

因此

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\Sigma_1^k|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\Sigma'+\Sigma'',$$

其中 Σ' 表示对 1) 中的区间求和，Σ'' 表示对 2)、3) 中的区间求和，于是由 f 的全连续性及(1)式

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\varepsilon+\varepsilon(b-a)=\varepsilon(b-a+1)。$$

令 $\varepsilon\to0$，得 $f(b)=f(a)$。把 b 换成任一 $x\in(a,b]$ 即得出 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上为常数的结论。

定理 6 牛顿—莱不尼兹公式

$$F(x)-F(a)=\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t\tag{4}$$

成立的充要条件是 $F(x)$ 是全连续函数。

证明：必要性：由定理 2 即得。

充分性：如果 $F(x)$ 是全连续的，那么由定理 1，$F \in V[a,b]$，因此 $F'(x)$ 几乎处处存在有限，并且勒贝格可积。作函数

$$\Phi(x) = \int_a^x F'(t)\mathrm{d}t,$$

显然 Φ 是全连续的。令 $\Phi(x) = F(x) - \Phi(x)$，那么 $\Phi(x)$ 也是全连续函数，并且 $\Phi'(x) \doteq 0$。由定理 5 可知 $\Phi(x) = \Phi(a) = F(a)$，也即(4)成立。

下面我们讨论全连续函数的分解。

定义 2 设 f 是 $[a,b]$ 上的有限函数，如果 $f'(x) \underset{m}{\doteq} 0$，并且 f 在 $[a,b]$ 上不恒为常数，那么称 f 为 $[a,b]$ 上的奇异函数。

在注 1.2 中提到的海维赛特函数和康托(Cantor)函数都是奇异函数。

定义 3 设 $f \in V[a,b]$，$\{x_n\}$ 是它的不连续点全体，那么称

$$\varphi(x) = \Sigma_k[f(x_k + 0) - f(x_k)]H(x - x_k) + \sum_k[f(x_k) - f(x_k - 0)]H_1(x - x_k)$$

为 f 的跳跃函数，这里 $H(x)$ 是海维赛特函数，而 $H_1(x) = H(x^+)$，它把 $H(x)$ 在 $x = 0$ 的左连续改成了右连续。

定理 7(勒贝格分解) 设 $g \in V[a,b]$，那么 g 一定可以分解为

$$g = g_J + g_S + g_{AC},$$

其中 g_J 是 g 的跳跃部分，g_S 是连续奇异函数，g_{AC} 是全连续函数。

证明：设 g_J 是定义 3 中的 φ，令 $g_1 = g - g_J$，那么 g_1 是连续有界变差函数，令

$$g_{AC} = \int_a^x g_1'(t)\mathrm{d}t, g_S = g_1 - g_{AC},$$

那么由定理 2 和定理 4 可知 $g_{AC} \in AC[a,b]$，g_S 是连续奇异函数。

习　　题

A　类

1. 证明函数 f 是 $[a,b]$ 上全连续的充要条件是对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对任何一族互不相交的开区间 $\{(a_\nu,b_\nu)\}$，只要 $\Sigma(b_\nu-a_\nu)<\delta$ 时，总有 $\Sigma|f(b_\nu)-f(a_\nu)|<\varepsilon$。

2. 设 f 在 $[a,b]$ 上全连续，g 在 $[c,d]$ 上全连续，$R(f)\subset[c,d]$，证明 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上全连续。

3. 证明 f 在 $[a,b]$ 上满足李普希茨条件的充要条件是 f 是 $[a,b]$ 上的有界勒贝格可测函数的不定积分。

4. 设 f 是 $[a,b]$ 上全连续函数，证明 f 的 $\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$、$p(x)$、$n(x)$ 都是全连续函数。

5. 设 f、$g\in AC[a,b]$，那么 $fg\in AC[a,b]$，并且

$$\int_a^b(fg'+f'g)(x)\mathrm{d}x=f(b)g(b)-f(a)g(a)。$$

6. 设 g 是 $[a,b]$ 上连续增函数，$g(a)=c$，$g(b)=d$。

1) 如果 $E\subset[c,d]$ 是波雷耳集，那么 $m(E)=\mu_g(g^{-1}(E))$；

2) 如果 f 在 $[c,d]$ 上波雷耳可测可积，那么 $\int_c^d f(y)\mathrm{d}y=\int_a^b f(g(x))\mathrm{d}g(x)$；

3) 举例说明如果 g 只是右连续，那么 2) 可能不成立。

B　类

1. 1) 证明存在波雷耳集 $A\subset[0,1]$ 使 $0<m(A\cap I)<m(I)$ 对 $[0,1]$ 的任一子区间 I 成立；

2) 设 $f(x)=m([0,x]\cap A)$，那么 f 是绝对连续并且严格递增，但是 $f'=0$ 在一个正测度集上成立；

3) 令 $g(x) = m([0,x] \cap A) - m([0,x] - A)$，那么 $g \in AC[0,1]$，但是 g 在 $[0,1]$ 的任一子区间上不单调。

2. 设 f 在 $[a,b]$ 上单调增加，对任何集 $E \subset [a,b]$，记 $f(E) = \{f(x) | x \in E\}$，证明 f 是 $[a,b]$ 上全连续函数的充要条件是如果 $E \in \mathscr{B}$（波雷耳集类），$m(E) = 0$，那么 $m(f(E)) = 0$。

3. 证明 $[a,b]$ 上导数处处存在且有限的单调函数 f 必是全连续的。

4. 设 f 是 $[a,b]$ 上的凸（向下）函数，证明 f 必在 (a,b) 上连续，如果 f 又在 a、b 两点连续，那么 f 在 $[a,b]$ 上全连续。

5. 设 f 是 $[a,b]$ 上凸（向上）函数，$(X,\mathscr{S},\mu)$ 是测度空间，$E \in \mathscr{S}$，p 是 E 上非负可积函数，又设 φ 是 E 上可测函数，并且对任何 $x \in E$，$\varphi(x) \in [a,b]$，证明杰生(Jensen)不等式

$$f\left(\frac{\int_E \varphi(x)p(x)\mathrm{d}\mu(x)}{\int_E p(x)\mathrm{d}\mu(x)}\right) \leqslant \frac{\int_E f(\varphi(x))p(x)\mathrm{d}\mu(x)}{\int_E p(x)\mathrm{d}\mu(x)}。$$

6. 设 $f \in AC[a,b]$，证明 $\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$。

第三节　广义测度

设 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 是一个测度空间，f 是 X 上的非负可积函数，由性质 Ⅱ.3.5 可知

$$\nu(E) = \int_E f\mathrm{d}\mu, 对 E \in \mathscr{R}$$

是一个测度。对于一般的可积函数 f，令

$$\nu^+(E) = \int_E f^+ \mathrm{d}\mu,$$

$$\nu^-(E) = \int_E f^- \mathrm{d}\mu,$$

那么

$$\nu(E) = \nu^+(E) - \nu^-(E) \tag{1}$$

是两个测度的差。本节我们就来研究这样的集函数。

定义1 设$(X;\mathscr{R})$是可测空间，μ_1、μ_2是$(X,\mathscr{R})$上的二个测度，其中至少有一个是有限测度，那么$(X、\mathscr{R})$上的集函数

$$\mu(E)=\mu_1(E)-\mu_2(E) \tag{2}$$

称为$(X,\mathscr{R})$上的广义测度。

易见任一测度均为广义测度，为加以区别，有时称普通的测度为正测度。

例1 设ν是$(X,\mathscr{R})$上的正测度，$f:X\to\overline{\boldsymbol{R}}$是一个可测函数，$\int_X f^+\mathrm{d}\nu$，$\int_X f^-\mathrm{d}\nu$中至少有一个有限（此时称$f$关于$\nu$广义可积），那么$\mu(E)=\int_E f\mathrm{d}\nu$是广义测度。这个积分等式以后常记为$\mathrm{d}\mu=f\mathrm{d}\nu$。

稍后我们将看到任一广义测度都可以写成例2的形式，因此我们可以把$\mathrm{d}\mu=f\mathrm{d}\nu$称为广义测度的微分形式。

例2 设$(\boldsymbol{R},\mathscr{R})$是以实数轴为基本集的一个可测空间，$\{x_n\}$，$\{r_n\}$是两个实数列，$\Sigma_n|r_n|<\infty$，对$E\in\mathscr{R}$，令$\mu(E)=\Sigma_{x_n\in E}r_n$，那么$\mu(E)$是广义测度。事实上，令$\mu_1(E)=\Sigma'_{x_n\in E}r_n$，$\mu_2(E)=\Sigma''_{x_n\in E}r_n$，这里$\Sigma'$对正$r_n$取和，$\Sigma''$对负$r_n$取和。不难证明$\mu_1$、$\mu_2$是正测度，而$\mu(E)=\mu_1(E)-\mu_2(E)$。

注1 可测空间$(X,\mathscr{R})$上的广义测度μ具有下面的性质：

1)$\mu(\varnothing)=0$，

2)μ的值域至多只含$+\infty$，$-\infty$中的一个，

3) 如果$\{E_n\}\subset\mathscr{R}$，$E_i\cap E_j=\varnothing$对$i\neq j$，那么$\mu(\bigcup_1^\infty E_n)=\Sigma_1^\infty\mu(E_n)$。

稍后我们将会看到如果$\mu(\bigcup_1^\infty E_n)$有限，那么$\Sigma_1^\infty\mu(E_n)$绝对收敛。

和正测度的情形一样可以证明

命题1 设μ是可测空间$(X,\mathscr{R})$上的广义测度，$\{E_n\}\subset\mathscr{R}$是单调增列，那么$\mu(\bigcup_1^\infty E_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)$；如果$\{E_n\}\subset\mathscr{R}$是单调降列，并

且对某个 n，$\mu(E_n)<\infty$，那么 $\mu(\bigcap_1^\infty E_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)$。

(1) 式提示了广义测度的一种分解方式，下面我们致力于研究由(2) 式定义的广义测度是否具有形式(1) 的分解。

定义 2 设 μ 是$(X,\mathscr{R})$ 上的广义测度，$E\in\mathscr{R}$ 称为 μ 的正集(负集、零集)，如果对任一 $F\subset E$，$F\in\mathscr{R}$ 有 $\mu(F)\geqslant 0(\leqslant 0,=0)$。

注 2 1) 由定义可知正(负、零) 集的可测子集仍是正(负、零) 集。

2) $\mu(E)\geqslant 0(\leqslant 0,=0)$ 并不意味着 E 是 μ 的正(负、零) 集，因为可能 $E=E_1\cup E_2$，$E_1\cap E_2=\varnothing$，$\mu(E_1)>0$，$\mu(E_2)<0$，而 $\mu(E_1)+\mu(E_2)>0$。

3) 对例 1 中的 μ，令 $P=\{x:f(x)\geqslant 0\}$，$N=\{x:f(x)\leqslant 0\}$，那么 P,N 分别是 μ 的正集和负集。如果 $f<0$，那么 $P=\varnothing$。

引理 1 如果 P_n 是 μ 的正集，那么 $\bigcup_1^\infty P_n$ 也是 μ 的正集。

证明：令 $Q_n=P_n-U_1^{n-1}P_j$，那么 $Q_n\subset P_n$ 是 μ 的正集，而且 Q_n 两两不交，$\bigcup_1^\infty Q_n=\bigcup_1^\infty P_n$。设 $E\in\boldsymbol{R}$，$E\subset\bigcup_1^\infty P_n$，那么 $\mu(E)=\mu(E\cap\bigcup_1^\infty Q_n)=\Sigma_1^\infty\mu(E\cap Q_n)\geqslant 0$，因此 $\bigcup_1^\infty P_n$ 是 μ 的正集。

定理 1(哈恩(Hahn) 分解) 设 μ 是$(X,\mathscr{A})$ 上的广义测度，$\mathscr{A}$ 是 σ- 代数，那么有正集 P 和负集 N 使 $X=P\cup N$，$P\cap N=\varnothing$。如果 P'、N' 是另一对这样的分解，那么 $P\Delta P'(=N\Delta N')$ 是 μ 的零集。

证明：不失一般性可设 μ 不取 $+\infty$，我们先证明如果 $\mu(A)>-\infty$，那么对任一 $\varepsilon>0$，有 $B\subset A$ 使 $\mu(B)\geqslant\mu(A)$，并且对任一 $E\subset B$ 使 $\mu(E)>-\varepsilon$。假设不然，那么对某个 $\varepsilon>0$，对任何使 $\mu(B)\geqslant\mu(A)$ 的 $B\subset A$ 总有 $E_1\subset B(\subset A)$ 使 $\mu(E_1)\leqslant-\varepsilon$。由于 $\mu(A-E_1)=\mu(A)-\mu(E_1)\geqslant\mu(A)$，视 $A-E_1$ 为 B，那么有 $E_2\subset A-E_1$ 使 $\mu(E_2)\leqslant-\varepsilon$。这样继续下去，就得到互不相交集列 $\{E_n\}\subset A$ 使 $\mu(E_n)\leqslant-\varepsilon$。令 $E=\bigcup_1^\infty E_n$，那么 $\mu(A-E)=\mu(A)-\Sigma_1^\infty\mu(E_n)=\infty$，矛盾。

再证明如果 $\mu(A)>-\infty$，那么有正集 $P\subset A$ 使 $\mu(P)\geqslant\mu(A)$。事实上，取 $A_1=B$，并设 $A_1,\cdots,A_{n-1}$ 已经取定。由上面的证明有 A_n

$\subset A_{n-1}$，$\mu(A_n) \geqslant \mu(A_{n-1})$，对任一 $E \subset A_n$ 有 $\mu(E) > -\dfrac{1}{n}$。令 $P = \bigcap_1^\infty A_n$，那么 $\mu(P) = \lim \mu(A_n) \geqslant \mu(A)$。任取 $E \subset P$，那么 $E \subset A_n$，因此 $\mu(E) > -\dfrac{1}{n}$。令 $n \to \infty$，得 $\mu(E) \geqslant 0$，故 P 为正集。

上述的正集 P 未必是最大的，为了得到最大的正集 P，我们记 $s = \sup\{\mu(A): A \in \mathscr{A}\}$，那么有集列 $\{A_n\} \subset \mathscr{A}$，使 $\mu(A_n) \to s$。由证明的第 2 段，又有正集列 $\{P_n\} \subset \mathscr{A}$ 使 $\mu(P_n) \to s$。令 $P = \bigcup_1^\infty P_n$，因为 $\mu(P) \geqslant \mu(P_n)$，故 $\mu(P) = s$。由引理 8 知 P 是正集。令 $N = P^c$，那么 N 为负集。假设不然，有 $E \subset N, E \in \mathscr{A}$，使 $\mu(E) > 0$，于是 $\mu(P \cup E) = \mu(P) + \mu(E) > s$，矛盾。

最后设 P', N' 是另一对分解，那么 $P - P' = P \cap N'$，因此 $P - P'$ 既是正集又是负集，从而是零集。同理 $P' - P$ 也是零集，因此 $P \Delta P'$ 也是零集。

定义 3 设 $(X, \mathscr{R})$ 是一个可测空间，μ 是 $\mathscr{R}$ 上的广义测度，如果 $X = P \cup N$，$P \cap N = \varnothing$，其中 P、N 分别是 μ 的正集和负集，那么称这个分解为 μ 的哈恩分解。

下面我们考察不同测度之间的关系。对例 2 中的测度 $\mu(E) = \sum_{x_n \in E} r_n$，令 $F = \{x_n\}_{n=1}^\infty$，那么 F^c 就是 μ 的零集，或者说 F 是 μ 的支集。然而 $m(F) = 0$，这说明 μ 与 m 是互不相关的。前述的 ν^+, ν^- 也有类似的关系。于是我们引入下面的定义。

定义 4 可测空间 $(X, \mathscr{R})$ 上的广义测度 μ、ν 称为互相奇异的，如果存在集合 $E, F \in \mathscr{R}$，使 $E \cap F = \varnothing$，$E \cup F = X$，并且 E 是 μ 的零集，F 是 ν 的零集。我们用 $\mu \perp \nu$ 表示 μ 与 ν 互相奇异。

下面我们将在测度关于集合的哈恩分解的基础上进一步把测度分解为两个互为奇异的正测度的差。

定理 2 设 μ 是可测空间 $(X, \mathscr{R})$ 上的广义测度，那么存在唯一的正测度 μ^+、μ^- 使 $\mu = \mu^+ - \mu^-$，$\mu^+ \perp \mu^-$。

证明：设 $X = P \cup N$ 是 μ 的哈恩分解，令 $\mu^+(E) = \mu(E \cap P)$，

$\mu^-(E) = -\mu(E \cap N)$。易见 $\mu = \mu^+ - \mu^-$，P 是 μ^- 的零集，N 是 μ^+ 的零集，因而 $\mu^+ \perp \mu^-$。现证分解的唯一性。设 $\mu = \nu^+ - \nu^-$，$\nu^+ \perp \nu^-$，即有 $E, F \in \mathscr{R}$，$E \cap F = \varnothing$，$E \cup F = X$，F 是 ν^+ 的零集，E 是 ν^- 的零集，那么 $X = E \cup F$ 是 μ 的哈恩分解。为证唯一性我们先证明 E 是 μ 的正集，F 是 μ 的负集。对 $A \subset E$，$A \in \mathscr{R}$，有 $\nu^-(E) = 0$，因此 $\mu(A) = \nu^+(A) \geqslant 0$，也即 E 是 μ 的正集。类似地可证 F 是 μ 的负集。这样 $P \Delta E$ 是零集，因此对任一 $A \in \mathscr{R}$，

$$
\begin{aligned}
\nu^+(A) &= \nu^+(A \cap E)(\text{因为 } F \text{ 是 } \nu^+ \text{ 的零集}) \\
&= \mu(A \cap E) \\
&\quad (\text{因为 } \mu = \nu^+ - \nu^-, \text{而 } E \text{ 是 } \gamma^- \text{ 的零集}) \\
&= \mu(A \cap P) \\
&\quad (\text{因为}(A \cap E)\Delta(A \cap P) \subset A \cap (E \Delta P)) \\
&= \mu^+(A)(\text{因为 } \mu^+(A) = \mu(A \cap P)。
\end{aligned}
$$

由此又可推出 $\mu^- = \nu^-$。

定义 5 测度 $\mu^+(\mu^-)$ 称为 μ 的正(负)变差测度，$\mu = \mu^+ - \mu^-$ 称为 μ 的若当分解。令

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-,$$

称为 μ 的全变差测度。

命题 2 设 μ 是可测空间 $(X, \mathscr{R})$ 上的广义测度，那么

1) $E \in \mathscr{R}$ 是 μ 的零集当且仅当 $|\mu|(E) = 0$；

2) $\mu \perp \nu$ 当且仅当 $|\mu| \perp \nu$，当且仅当 $\mu^+ \perp \nu$，$\mu^- \perp \nu$。

证明：1) 设 $X = P \cap N$ 是 μ 的哈恩分解，E 是 μ 的零集，那么 $\mu^+(E) = \mu(E \cap P) = 0$，$\mu^-(E) = -\mu(E \cap N) = 0$，从而 $|\mu|(E) = 0$。反之，如果 $|\mu|(E) = 0$，那么 $\mu^\pm(E) = 0$。因为 $\mu^\pm$ 是正测度，对任一 $F \subset E$，$F \in \mathscr{R}$ 有 $\mu^\pm(F) = 0$，因此 $\mu(F) = 0$，故 E 是 μ 的零集。

2) $\mu \perp \nu$ 意味着存在 E、F 使 $E \cup F = X$，$E \cap F = \varnothing$，E 是 μ 的零集，F 是 γ 的零集。由 1) 有 $|\mu|(E) = 0$，而 $|\mu|$ 是正测度，因此 E 是 $|\mu|$ 的零集。反过来，如果 $|\mu| \perp \nu$，那么有 E、F 使 $E \cup F = X$，$E \cap F = \varnothing$，E 是 $|\mu|$ 的零集，F 是 ν 的零集。因为 $|\mu|(E) = 0$，由 1) E

是 μ 的零集。这样第一个当且仅当得证。又 $|\mu| \perp \nu$ 当且仅当有上述的 E,F 使 $|\mu|(E)=0,F$ 是 ν 的零集，而 $|\mu|(E)=0$ 当且仅当 $\mu^+(E)=\mu^-(E)=0$ 当且仅当 E 是 μ^+ 和 μ^- 的零集。

命题 3　设$(X,\mathscr{R})$是一个可测空间，如果 μ 有限，那么 μ 有界。

证明：所谓 μ 有限，即 μ 不取 $\pm\infty$。而 $\mu^+(E)\leqslant\mu^+(X)=\mu(X\cap P)=\mu(P)<\infty$ 表明 μ^+ 有界。类似地 μ^- 有界，因此 $\mu=\mu^+-\mu^-$ 有界。

定理 3　可测空间$(X,\mathscr{R})$上的任一广义测度 μ 均可写成 $\mu(E)=\int_E f\mathrm{d}\nu$ 的形式，这里 $f=\chi_P-\chi_N,X=P\cup N$ 是 μ 的哈恩分解，$\nu=|\mu|$。

证明：因为

$$
\begin{aligned}
\mu(E) &= \mu^+(E)-\mu^-(E)(\text{根据 }\mu=\mu^+-\mu^-)\\
&= \mu(E\cap P)-\mu(E\cap N)(\text{根据 }\mu^+、\mu^-\text{ 的定义})\\
&= \mu^+(E\cap P)-\mu^-(E\cap P)\\
&\quad -(\mu^+(E\cap N)-\mu^-(E\cap N))\\
&= \mu^+(E\cap P)-\mu^-(E\cap N)\\
&\quad (\text{因为 }P\text{ 是 }\mu^-\text{ 的零集},N\text{ 是 }\mu^+\text{ 的零集})\\
&= \int_{E\cap P}\mathrm{d}|\mu|-\int_{E\cap N}\mathrm{d}|\mu|\\
&= \int_E(\chi_P-\chi_N)\mathrm{d}|\mu|。
\end{aligned}
$$

最后我们给出关于广义测度可积的定义。

定义 6　$(X,\mathscr{R})$是一个可测空间，μ 是一个广义测度，$f:X\to\boldsymbol{R}$。如果 $\mu=\mu^+-\mu^-$ 是 μ 的若当分解，积分$\int f\mathrm{d}\mu^+$、$\int f\mathrm{d}\mu^-$ 存在且至少有一个有限，那么说 f 关于 μ 广义可积，并且定义

$$\int f\mathrm{d}\mu=\int f\mathrm{d}\mu^+-\int f\mathrm{d}\mu^-。$$

如果$\int f\mathrm{d}\mu^+$、$\int f\mathrm{d}\mu^-$ 都有限，那么称 f 关于 μ 可积。

习　　题

A　类

1. 设$\{\mu_n\}$是可测空间$(X,\mathscr{R})$上一列有限的广义测度。

1）如果$\{\mu_n\}$是全有限的测度序列，证明必存在$(X,\mathscr{R})$上全有限测度μ，使得$\mu_n \ll \mu(n=1,2,\cdots)$；

2）证明必存在$(X,\mathscr{R})$上有限测度μ，使得$\mu_n \ll \mu(n=1,2,\cdots)$。

2. 设ν、μ是可测空间$(X,\mathscr{R})$上全σ-有限的广义测度，A_ν、B_ν、A_μ、B_μ分别是ν、μ的哈恩分解中的正、负集，

1）求出$\dfrac{d\nu}{d|\nu|}$的表达式；

2）假设$\nu \ll \mu$并已知$\dfrac{d\nu}{d\mu}$，求出$\dfrac{d\nu^+}{d\mu}$、$\dfrac{d\nu^-}{d\mu}$、$\dfrac{d|\nu|}{d\mu}$、$\dfrac{d\nu^+}{d|\mu|}$、$\dfrac{d\nu^-}{d|\mu|}$、$\dfrac{d\nu}{d|\mu|}$、$\dfrac{d|\nu|}{d|\mu|}$。

3. 证明定理1在ν、μ为广义测度的情形成立。

4. 设ν、μ是可测空间$(X,\mathscr{R})$上的全σ-有限测度，那么

1）$\nu \perp \mu$的充要条件是$\dfrac{d\nu}{d(\nu+\mu)} \cdot \dfrac{d\mu}{d(\nu+\mu)} \underset{\nu+\mu}{\doteq} 0$；

2）$\nu \sim \mu$（称ν等价于μ，即$\nu \ll \mu, \mu \ll \nu$同时成立）的充要条件是$\dfrac{d\nu}{d(\nu+\mu)} \underset{\nu+\mu}{\dot{>}} 0$；

3）τ是$(X,\mathscr{R})$上另一个全σ-有限测度，并且$\nu \ll \tau, \mu \ll \tau$。

试给出$\nu \perp \mu$，$\nu \sim \mu$用$\dfrac{d\nu}{d\tau}$、$\dfrac{d\mu}{d\tau}$来表示的充要条件的形式。

5. 1）设μ是可测空间$(X、\mathscr{R})$上全σ-有限测度，证明必存在$(X,\mathscr{R})$上全有限测度ν，使$\nu \sim \mu$；

2）设$\{\mu_n\}$是可测空间$(X,\mathscr{R})$上全σ-有限的广义测度的序列，证明必存在$(X,\mathscr{R})$上全有限测度μ，使$\mu_n \ll \mu(n=1,2,\cdots)$。

6. 举例说明：如果μ是可测空间$(X,\mathscr{R})$上σ-有限测度，未必存

在$(X,\mathscr{R})$上有限测度ν，使$\nu\sim\mu$。

7. 设g是$[a,b]$上全连续函数，f是$[a,b]$上波雷耳可测函数，那么f关于测度μ_g可积的充要条件是fg'勒贝格可积。当可积时，有

$$\int_a^b f\mathrm{d}g=\int_a^b fg'\mathrm{d}x。$$

8. 设μ,ν是$(X,\mathscr{R})$上的有限测度，$\nu\ll\mu$，令$\lambda=\mu+\nu$，如果$f=\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}$，那么$0\leqslant f<1$对$\mu$几乎处处成立，并且$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}=f(1-f)^{-1}$。

参考书目

1. 夏道行,吴卓人,严绍宗,舒五昌.实变函数论与泛函分析.北京:高等教育出版社,1985.
2. 江泽坚,吴智泉.实变函数论.北京:人民教育出版社,1959.
3. 郑维行,王声望.实变函数与泛函分析概要.北京:人民教育出版社,1989.
4. 周民强.实变函数.北京大学出版社,1996.
5. 程其襄,张奠宙,魏国强,阎革兴,钱自强等.实变函数与泛函分析基础.北京:高等教育出版社,1997.
6. 汪林.实分析中的反例.北京:高等教育出版社,1989.
7. B.R. 盖尔鲍姆,J.M.H奥姆斯特德.分析中的反例.上海科技出版社,1980.
8. И.П. 纳汤松.实变函数论.北京:高等教育出版社,1955.
9. G.B.Folland. Real Analysis-Modern Techniques and Their Applications, John Wiley & Sons. lnc, 1984.

[General Information]
□□=□□□□□□□□□
□□=□□□
□□=150
SS□=10192626
□□□□=1999□05□□1□

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]

[illegible]

- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]—[illegible]
- [illegible]

[illegible]

- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]

[illegible]

- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]

[illegible]